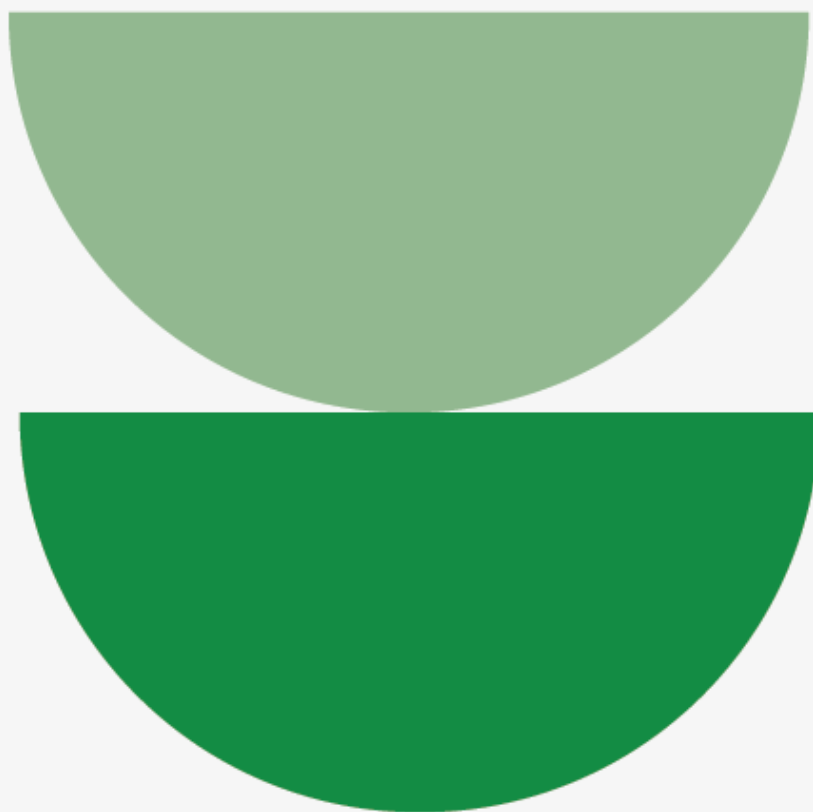


5

# בגרזיות במתמטיקה

כיתה י"א



שאולון 571 תוכנית חדשה

יואל גבע 

עדנני ל-2024-2025

# הקדמה

מורים ותלמידים יקרים,  
אנו שמחים להגיש לכם חוברת הכנה לקראת הבגרות במתמטיקה  
לשאלון 571 (5 יחידות לימוד).

בחוברת תמצאו 23 מבחנים :  
17 מבחני הבגרות שנערכו עד היום בשאלון 571 (מועדי חורף וקיץ)  
ממועד א', קיץ תש"ף 2020 עד וכולל מועד ב' קיץ תשפ"ד 2024.  
בנוסף, החוברת כוללת 6 מבחני דוגמה (מבחנים 1-6).

לכל השאלות בחוברת קיימים סרטוני וידאו הכוללים פתרונות מלאים  
באתר [my.geva.co.il](http://my.geva.co.il)

## כיצד צופים בסרטון פתרון?

נכנסים לאתר [my.geva.co.il](http://my.geva.co.il)  
בוחרים את מספר יחידות הלימוד ונכנסים לפתרונות וידאו למבחני  
בגרות 471.  
כעת ניתן לראות את פתרונות הווידאו לכל השאלות ממבחני הבגרות.  
**הפתרונות לשני המבחנים הראשונים הם בחינם!**

## כיצד אנו ממליצים להיעזר בסרטוני הפתרון שבאתר [my.geva](http://my.geva)?

בכל שאלה שבה אתם מתקשים, או שהתשובה הסופית שקיבלתם  
אינה תואמת את התשובות המופיעות בסוף המבחן, מומלץ לצפות  
בסרטון הפתרון המתאים. כמו כן, אם קיים נושא שבו אתם מרגישים  
צורך בחיזוק נוסף, מומלץ לצפות בכל סרטוני הפתרון באותו נושא.  
(מיון שאלות המבחנים לפי נושאים מופיע בהמשך החוברת).

בנוסף, ניתן לרכוש באתר [my.geva.co.il](http://my.geva.co.il) מנוי לסרטוני פתרון  
לשאלות מתוך ספרי הלימוד לשאלון 571, בהוצאת יואל גבע.

# תודות

חובה נעימה לנו להודות לכל אלו שסייעו במלאכת הכנת החוברת.

תודה ענקית לעפר ילין על בדיקת התרגילים בחוברת,

על תרומתו הרבה בהערות והארות ועל תמיכתו השוטפת במורים.

תודה רבה לאירנה אדלשטיין על ההקלדה, העיצוב והעריכה של החוברת.

תודה לצוות ההוצאה לאור על העבודה המסורה.

**אריק דז'לדטי**

**יואל גבע**

## לתשומת ליבכם!

משך הבחינה **בשנת 2025, לכל המועדים** הוא ארבע שעות וחמש עשרה דקות,

כפי שפורסם בחוזר אגף בחינות מ-04.11.2024.

התוספת לזמן הבחינה בשאלונים המותאמים תפורסם על ידי אגף הבחינות.

הבחירה **במועדי 2025** היא חמש שאלות.

לפחות שאלה אחת מן הפרק הראשון או הפרק השני,

כאשר אם בוחרים בפרק הראשון אז שני סעיפים מתוך ארבעה.

לפחות שאלה אחת מכל אחד מהפרקים השלישי והרביעי.

ניקוד : 20 נקודות לשאלה.

לשאלונים מותאמים הבחירה היא ארבע שאלות.

לפחות שאלה אחת מהפרק הרביעי,

כאשר אם בוחרים בפרק הראשון אז שני סעיפים מתוך ארבעה.

ניקוד : 25 נקודות לשאלה.

זכות היוצרים על שאלות הלקוחות ממבחני בגרות שמורות למדינת ישראל.

כל הזכויות על השאלות האחרות שמורות להוצאת הספרים יואל גבע.

אנו מאחלים לכם הצלחה רבה בבחינת הבגרות.

יואל גבע – הוצאת הספרים, צוות האתר [my.geva.co.il](http://my.geva.co.il)

# המבנה של שאלון 571

תלמידי 5 יחידות לימוד נבחנים בשני שאלונים.  
השאלון הראשון הוא 035571 והשאלון השני הוא 035572.

בשאלון 571 ארבעה פרקים.  
משך הבחינה: שלוש שעות וארבעים וחמש דקות.

## המבנה של שאלון 035571:

- פרק ראשון – שאלות קצרות (20 נקודות).**  
הפרק כולל 4 סעיפים, מתוכם יש לענות על 3 סעיפים  
(ערך כל שאלה – 20 נקודות).
  - פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה (20 נקודות).**  
הפרק כולל 2 שאלות, מתוכן יש לבחור 1 שאלה.  
(לכל שאלה – 20 נקודות).
  - פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור (20 נקודות).**  
הפרק כולל 2 שאלות, מתוכן יש לבחור 1 שאלה.  
(לכל שאלה – 20 נקודות).
  - פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות  
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות).**  
הפרק כולל 3 שאלות, מתוכן יש לבחור 2 שאלות.  
(לכל שאלה – 20 נקודות).
- בעמוד הבא מצורף דף ההוראות לנבחן כפי שמופיע בטופס הבגרות של שאלון 571.

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

#### הוראות

תוכנית חדשה

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וארבעים וחמש דקות
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
- פרק ראשון – שאלות קצרות** פרק חובה יש לענות על 3 מתוך 4 סעיפים
- פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה** יש לענות על 1 מתוך 2 שאלות
- פרק שלישי – גאומטריה, טריגונומטריה במישור** יש לענות על 1 מתוך 2 שאלות
- פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות** יש לענות על 2 מתוך 3 שאלות

$$100 = 20 * 5 \text{ נקודות}$$

- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. תיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

**בהצלחה!**

# מיון שאלות המבחנים לפי נושאים

## שאלות קצרות

הערה:

מיון השאלות בחלק זה כולל רק שאלות קצרות מהפרק הראשון במבחן.

### אינדוקציה

#### הוכחת זהויות

עמוד 67 שאלה 1-ב, עמוד 84 שאלה 1-ב, עמוד 93 שאלה 1-ב,  
עמוד 112 שאלה 1-ב, עמוד 141 שאלה 1-א, עמוד 150 שאלה 1-א,  
עמוד 182 שאלה 1-א, עמוד 191 שאלה 1-א, עמוד 202 שאלה 1-א,  
עמוד 213 שאלה 1-א.

#### התחלקות במספר נתון

עמוד 52 שאלה 1-ב, עמוד 60 שאלה 1-א, עמוד 76 שאלה 1-ב,  
עמוד 130 שאלה 1-א.

#### התלכדות סדרות

אין שאלות.

#### הוכחות ויזואליות

אין שאלות.

#### כשלים בהוכחת אינדוקציה

עמוד 20 שאלה 1-א, עמוד 52 שאלה 1-א, עמוד 160 שאלה 1-א.

# **סדרות**

## **סדרות חשבוניות**

עמוד 2 שאלה 1-ג, עמוד 53 שאלה 1-ד.

## **סדרות הנדסיות**

עמוד 41 שאלה 1-ב.

## **סדרות אינסופיות מתכנסות**

עמוד 31 שאלה 1-ד.

## **סדרות כלליות**

עמוד 10 שאלה 1-ג, עמוד 121 שאלה 1-ב.

# **הסתברות**

עמוד 20 שאלה 1-ב, עמוד 94 שאלה 1-ד (נוסחת ברנולי),

עמוד 102 שאלה 1-ב, עמוד 172 שאלה 1-ב.

# גיאומטריה וטריגונומטריה

## גיאומטריה

עמוד 60 שאלה 1-ב, עמוד 67 שאלה 1-ג, עמוד 76 שאלה 1-א,  
עמוד 84 שאלה 1-א, עמוד 93 שאלה 1-א, עמוד 103 שאלה 1-ד,  
עמוד 112 שאלה 1-א, עמוד 131 שאלה 1-ד, עמוד 141 שאלה 1-ב,  
עמוד 150 שאלה 1-ב, עמוד 160 שאלה 1-ב, עמוד 171 שאלה 1-א,  
עמוד 182 שאלה 1-ב, עמוד 191 שאלה 1-ב.

## טריגונומטריה

עמוד 2 שאלה 1-ד, עמוד 21 שאלה 1-ג, עמוד 30 שאלה 1-א,  
עמוד 213 שאלה 1-ב.

## שאלות משולבות

עמוד 203 שאלה 1-ד.



# אנליזה

## חשבון דיפרנציאלי (כולל קדם אנליזה)

עמוד 1 שאלה 1-א, עמוד 1 שאלה 1-ב (פונקציה טריגונומטרית),  
עמוד 10 שאלה 1-ב, עמוד 11 שאלה 1-ד, עמוד 21 שאלה 1-ד,  
עמוד 30 שאלה 1-ב, עמוד 31 שאלה 1-ג, עמוד 41 שאלה 1-א,  
עמוד 53 שאלה 1-ג, עמוד 60 שאלה 1-ג,  
עמוד 60 שאלה 1-ד (פונקציה טריגונומטרית), עמוד 67 שאלה 1-א,  
עמוד 76 שאלה 1-ג, עמוד 76 שאלה 1-ד, עמוד 84 שאלה 1-ג,  
עמוד 103 שאלה 1-ג, עמוד 113 שאלה 1-ג, עמוד 113 שאלה 1-ד,  
עמוד 122 שאלה 1-ג (פונקציה טריגונומטרית), עמוד 122 שאלה 1-ד,  
עמוד 130 שאלה 1-ב, עמוד 142 שאלה 1-ג, עמוד 142 שאלה 1-ד,  
עמוד 151 שאלה 1-ג, עמוד 162 שאלה 1-ד, עמוד 183 שאלה 1-ג,  
עמוד 192 שאלה 1-ג, עמוד 202 שאלה 1-ב, עמוד 202 שאלה 1-ג,  
עמוד 214 שאלה 1-ג.

## חשבון אינטגרלי

עמוד 42 שאלה 1-ד, עמוד 52 שאלה 1-ב,  
עמוד 67 שאלה 1-ד (פונקציה ללא תבנית),  
עמוד 85 שאלה 1-ד (אינטגרל מצטבר),  
עמוד 94 שאלה 1-ג (אינטגרל מצטבר),  
עמוד 102 שאלה 1-א (אינטגרל מצטבר),  
עמוד 130 שאלה 1-ג (אינטגרל מצטבר),  
עמוד 151 שאלה 1-ד (אינטגרל מצטבר), עמוד 161 שאלה 1-ג,  
עמוד 172 שאלה 1-ג, עמוד 183 שאלה 1-ד, עמוד 193 שאלה 1-ד,  
עמוד 215 שאלה 1-ד.

## שאלות משולבות

עמוד 10 שאלה 1-א, עמוד 42 שאלה 1-ג, עמוד 121 שאלה 1-א,  
עמוד 173 שאלה 1-ד.

# מיון שאלות:

## פרק שני, פרק שלישי, פרק רביעי

### סדרות

#### סדרה חשבונית

עמוד 3 שאלה 2, עמוד 32 שאלה 2, עמוד 95 שאלה 2,  
עמוד 114 שאלה 2, עמוד 174 שאלה 2, עמוד 184 שאלה 2,  
עמוד 193 שאלה 2.

#### סדרה הנדסית

עמוד 43 שאלה 2, עמוד 61 שאלה 3, עמוד 78 שאלה 3,  
עמוד 123 שאלה 2.

#### סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת

עמוד 11 שאלה 2, עמוד 69 שאלה 3, עמוד 104 שאלה 2 סעיפים א-ד,  
עמוד 132 שאלה 2, עמוד 143 שאלה 2, עמוד 152 שאלה 2,  
עמוד 163 שאלה 2 סעיפים א-ב, עמוד 204 שאלה 2, עמוד 216 שאלה 2.

#### סדרות חשבוניות והנדסיות באותה שאלה

עמוד 86 שאלה 2, עמוד 104 שאלה 2 סעיף ה, עמוד 163 שאלה 2.

#### סדרות כלליות, כלל נסיגה

עמוד 22 שאלה 2, עמוד 53 שאלה 2.

# הסתברות

## טבלה דו ממדית

עמוד 33 שאלה 3, עמוד 77 שאלה 2.

## כפל וחיסור הסתברויות

עמוד 124 שאלה 3.

## נוסחת ברנולי – התפלגות בינומית

עמוד 3 שאלה 3, עמוד 23 שאלה 3, עמוד 44 שאלה 3,  
עמוד 115 שאלה 3, עמוד 133 שאלה 3, עמוד 205 שאלה 3.

## בעיות המשלבות טבלה דו ממדית

### או דיאגרמת עץ עם נוסחת ברנולי

עמוד 12 שאלה 3, עמוד 54 שאלה 3, עמוד 61 שאלה 2,  
עמוד 68 שאלה 2, עמוד 87 שאלה 3, עמוד 96 שאלה 3,  
עמוד 105 שאלה 3, עמוד 144 שאלה 3, עמוד 153 שאלה 3,  
עמוד 164 שאלה 3, עמוד 175 שאלה 3, עמוד 185 שאלה 3,  
עמוד 195 שאלה 3, עמוד 217 שאלה 3.

# גאומטריה

## שאלות עם משולשים ומרובעים (עם או בלי פרופורציות ודמיון)

עמוד 87 שאלה 4 סעיפים א-ב, עמוד 125 שאלה 4 סעיפים א-ג.

## שאלות עם מעגל (ללא דמיון משולשים)

עמוד 24 שאלה 4, עמוד 87 שאלה 4 סעיף ג, עמוד 125 שאלה 4 סעיף ד.

## שאלות עם מעגל (כולל דמיון משולשים)

עמוד 4 שאלה 4, עמוד 13 שאלה 4, עמוד 34 שאלה 4,  
עמוד 45 שאלה 4, עמוד 55 שאלה 4, עמוד 62 שאלה 4,  
עמוד 69 שאלה 4, עמוד 78 שאלה 4, עמוד 96 שאלה 4,  
עמוד 106 שאלה 4, עמוד 116 שאלה 4, עמוד 134 שאלה 4,  
עמוד 145 שאלה 4, עמוד 154 שאלה 4, עמוד 165 שאלה 4,  
עמוד 176 שאלה 4, עמוד 186 שאלה 4, עמוד 196 שאלה 4,  
עמוד 206 שאלה 4, עמוד 218 שאלה 4.

# טריגונומטריה

## שאלות עם משולשים ומרובעים

עמוד 69 שאלה 5.

## שאלות עם מעגל

עמוד 4 שאלה 5, עמוד 14 שאלה 5, עמוד 24 שאלה 5, עמוד 35 שאלה 5,  
עמוד 46 שאלה 5, עמוד 55 שאלה 5, עמוד 62 שאלה 5,  
עמוד 79 שאלה 5, עמוד 88 שאלה 5, עמוד 97 שאלה 5,  
עמוד 106 שאלה 5, עמוד 116 שאלה 5, עמוד 125 שאלה 5,  
עמוד 135 שאלה 5, עמוד 145 שאלה 5, עמוד 154 שאלה 5,  
עמוד 165 שאלה 5, עמוד 176 שאלה 5, עמוד 186 שאלה 5,  
עמוד 197 שאלה 5, עמוד 207 שאלה 5, עמוד 218 שאלה 5.

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

## חקירת פונקציות

### פולינומים

עמוד 155 שאלה 6.

### פונקציות רציונאליות

עמוד 6 שאלה 7, עמוד 36 שאלה 6 סעיפים א-ב,  
עמוד 57 שאלה 8 סעיפים א-ד, עמוד 70 שאלה 6,  
עמוד 89 שאלה 6 סעיפים א-ג, ה, עמוד 117 שאלה 6 סעיפים א-ד,  
עמוד 126 שאלה 6 סעיפים א-ג, עמוד 136 שאלה 6 סעיפים א-ג,  
עמוד 166 שאלה 6 סעיפים א-ד, עמוד 187 שאלה 6 סעיף א,  
עמוד 208 שאלה 6, עמוד 219 שאלה 6 סעיפים א-ג.

### פונקציות עם שורשים

עמוד 15 שאלה 6 סעיפים א-ב, עמוד 47 שאלה 6 סעיפים א-ג,  
עמוד 63 שאלה 8, עמוד 72 שאלה 8, עמוד 97 שאלה 6 סעיפים א-ב,  
עמוד 107 שאלה 6 סעיפים א-ה, עמוד 118 שאלה 7,  
עמוד 146 שאלה 6 סעיפים א-ג, עמוד 178 שאלה 7 סעיפים א-ג,  
עמוד 188 שאלה 7 סעיפים א-ג, עמוד 198 שאלה 6 סעיפים א-ד.

### פונקציות ללא תבנית אלגברית מפורשת

עמוד 25 שאלה 6 סעיפים א-ד, עמוד 126 שאלה 6 סעיף א,  
עמוד 167 שאלה 7 סעיפים א-ב.

## פונקציות טריגונומטריות

עמוד 5 שאלה 6, עמוד 16 שאלה 7, עמוד 26 שאלה 7,  
עמוד 37 שאלה 7 סעיפים א-ב, עמוד 48 שאלה 7,  
עמוד 56 שאלה 6 סעיפים א-ד, עמוד 63 שאלה 7, עמוד 71 שאלה 7,  
עמוד 80 שאלה 7 סעיפים א-ה, עמוד 98 שאלה 7, עמוד 108 שאלה 7,  
עמוד 127 שאלה 7, עמוד 137 שאלה 7 סעיפים א-ג,  
עמוד 147 שאלה 7 סעיפים א-ה, עמוד 156 שאלה 7 סעיפים א-ד,  
עמוד 177 שאלה 6, עמוד 199 שאלה 7 סעיפים א-ד, עמוד 209 שאלה 7,  
עמוד 220 שאלה 7 סעיפים א-ה.

# שאלות ערך קיצון

## שאלות ערך קיצון גאומטריות

עמוד 17 שאלה 8, עמוד 38 שאלה 8, עמוד 56 שאלה 7,  
עמוד 127 שאלה 8, עמוד 199 שאלה 8, עמוד 210 שאלה 8.

## שאלות ערך קיצון בפונקציות וגרפים

עמוד 7 שאלה 8, עמוד 81 שאלה 8, עמוד 99 שאלה 8,  
עמוד 109 שאלה 8, עמוד 138 שאלה 8, עמוד 147 שאלה 8,  
עמוד 157 שאלה 8, עמוד 179 שאלה 8, עמוד 221 שאלה 8.

## שאלות ערך קיצון עם פונקציות טריגונומטריות

עמוד 90 שאלה 8, עמוד 118 שאלה 8, עמוד 168 שאלה 8,  
עמוד 188 שאלה 8.

## שאלות ערך קיצון עם אינטגרלים

עמוד 27 שאלה 8.



# אינטגרלים

**הערה:** חלק מהסעיפים בנושא זה נרשמו גם תחת בכותרת חקירת פונקציות.

## פולינומים

השאלות בנושא זה נמצאות באינטגרל הכולל את זיהוי הנגזרת הפנימית של פונקציה מורכבת.

## פונקציות רציונליות

עמוד 36 שאלה 6 סעיף ג, עמוד 107 שאלה 6 סעיף ו, עמוד 167 שאלה 7, עמוד 176 שאלה 7 סעיף ה, עמוד 187 שאלה 6 סעיף ב, עמוד 219 שאלה 6 סעיף ד.

## פונקציות עם שורשים

עמוד 146 שאלה 6 סעיף ד, עמוד 188 שאלה 7 סעיף ד.

## פונקציות ללא תבנית אלגברית מפורשת

עמוד 25 שאלה 6 סעיפים ה-ו.

## פונקציות טריגונומטריות

עמוד 37 שאלה 7 סעיף ג, עמוד 56 שאלה 6 סעיף ה, עמוד 80 שאלה 7 סעיפים ו-ז, עמוד 137 שאלה 7 סעיף ד, עמוד 147 שאלה 7 סעיף ו, עמוד 156 שאלה 7 סעיף ה, עמוד 199 שאלה 7 סעיף ה.

## **אינטגרל הכולל את זיהוי הנגזרת הפנימית של פונקציה מורכבת**

**הערה:** חלק זה כולל פולינומים, פונקציות רציונאליות, פונקציות עם שורשים ופונקציות טריגונומטריות, שבהן לצורך מציאת האינטגרל יש לזהות את הנגזרת הפנימית של פונקציה מורכבת.

עמוד 5 שאלה 6 סעיף ג, עמוד 15 שאלה 6 סעיפים ג-ד,  
עמוד 47 שאלה 6 סעיף ד, עמוד 57 שאלה 8 סעיף ה, עמוד 63 שאלה 6,  
עמוד 79 שאלה 6, עמוד 89 שאלה 6 סעיף ד,  
עמוד 97 שאלה 6 סעיפים ג-ד, עמוד 117 שאלה 6 סעיף ה,  
עמוד 126 שאלה 6 סעיף ד, עמוד 198 שאלה 6 סעיף ה,  
עמוד 220 שאלה 7 סעיף ו.

## **שאלות המשלבות אינטגרל מצטבר**

**הערה:** חלק זה כולל פולינומים, פונקציות רציונאליות, פונקציות עם שורשים ופונקציות טריגונומטריות, והופיעו כבר במיונים אחרים בפרק זה.

עמוד 136 שאלה 6 סעיפים ד-ו, עמוד 178 שאלה 7.

## **שאלות המשלבות נפח גוף סיבוב**

עמוד 49 שאלה 8.

# תוכן עניינים

## מבחני בגרות – שאלון 571

1	.....	מבחן דוגמה מספר 1
10	.....	מבחן דוגמה מספר 2
20	.....	מבחן דוגמה מספר 3
30	.....	מבחן דוגמה מספר 4
41	.....	מבחן דוגמה מספר 5
52	.....	מבחן דוגמה מספר 6
60	.....	מבחן בגרות מספר 7 – קיץ תש"ף, 2020, מועד א.
67	.....	מבחן בגרות מספר 8 – קיץ תש"ף, 2020, מועד ב.
76	.....	מבחן בגרות מספר 9 – חורף תשפ"א, 2021.
84	.....	מבחן בגרות מספר 10 – קיץ תשפ"א, 2021, מועד א.
93	.....	מבחן בגרות מספר 11 – קיץ תשפ"א, 2021, מועד מיוחד.
102	.....	מבחן בגרות מספר 12 – קיץ תשפ"א, 2021, מועד ב.
112	.....	מבחן בגרות מספר 13 – חורף תשפ"ב, 2022, מועד א.
121	.....	מבחן בגרות מספר 14 – חורף תשפ"ב, 2022, מועד נבצרים.
130	.....	מבחן בגרות מספר 15 – קיץ תשפ"ב, 2022, מועד א.
141	.....	מבחן בגרות מספר 16 – קיץ תשפ"ב, 2022, מועד ב.
150	.....	מבחן בגרות מספר 17 – חורף תשפ"ג, 2023.
160	.....	מבחן בגרות מספר 18 – קיץ תשפ"ג, 2023, מועד א.
171	.....	מבחן בגרות מספר 19 – קיץ תשפ"ג, 2023, מועד מיוחד.
182	.....	מבחן בגרות מספר 20 – קיץ תשפ"ג, 2023, מועד ב.
191	.....	מבחן בגרות מספר 21 – חורף תשפ"ד, 2024.
202	.....	מבחן בגרות מספר 22 – קיץ תשפ"ד, 2024, מועד א.
213	.....	מבחן בגרות מספר 23 – קיץ תשפ"ד, 2024, מועד ב.

נוסחאון מתמטיקה 5 יחידות לימוד לתוכנית החדשה



# מבחן דוגמה מספר 1

## פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. רשום את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות המקבילות לצירים (אם יש כאלה) של הפונקציות הבאות:



$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{x-1} \quad (1)$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{2x-3} \quad (2)$$

ב. נתונות שתי הפונקציות:  $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ ,  $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ .



באיור שלפניכם שני גרפים:

גרף א- מתואר בקו מקווקו

גרף ב- מתואר בקו רציף

הנקודות A ו-B

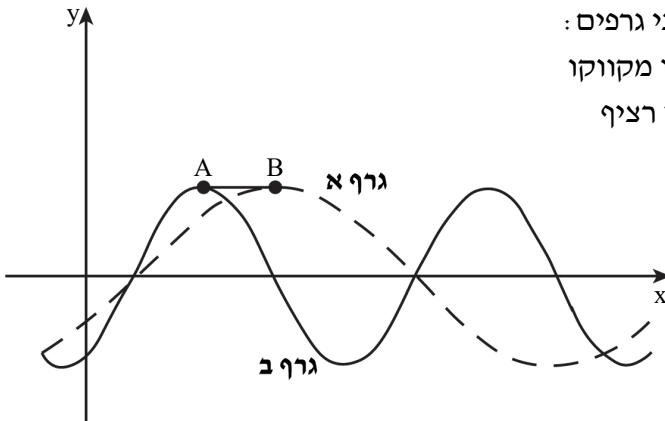
נמצאות מימין

לציר ה-y

והן הנקודות

הקרובות ביותר

לציר זה



בהן הפונקציות מקבלות ערכים מקסימליים.

מהו אורך הקטע AB? נמק קביעתך.

ג. נתונה סדרה חשבונית  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ , ובה  $2n+1$  איברים  
 (n הוא מספר טבעי).  
 הראה כי סכום הסדרה שווה ל-  $(2n+1) \cdot a_{n+1}$ .



ד. במשולש ABC נתון  $\beta = 20^\circ$ ,  $AC = 5$ ,  $AB = 3$ .

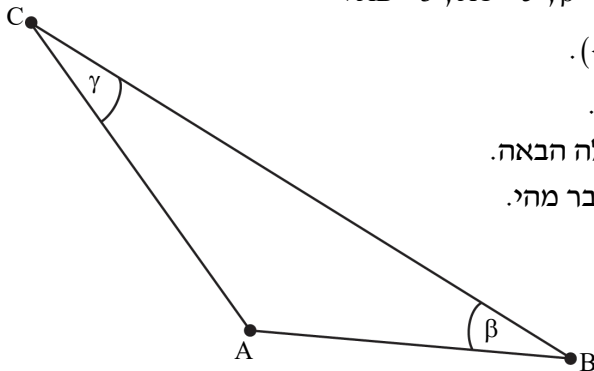


חשב את זווית  $\gamma$  ( $\sphericalangle ACB$ ).

דן הגיש את הפתרון הבא.

בדוק פתרונו של דן לשאלה הבאה.

אם יש טעות בפתרון, הסבר מהי.



$$\frac{5}{\sin 20^\circ} = \frac{3}{\sin \gamma}$$

$$\sin \gamma = \frac{3 \sin 20^\circ}{5}$$

↓

$$\gamma_1 = 11.84^\circ, \gamma_2 = 180 - 11.84 = 168.16^\circ$$

## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2.  $a_n$  היא סדרה חשבונית שההפרש שלה,  $d$ , שונה מ-0.

נתון:  $a_7 = -a_{17}$ .

א. מצא את  $a_{12}$ .



ב. (1) האם קיים בסדרה איבר שערכו שווה ל- $-a_1$ ? נמק.

(2) מצא מספר טבעי  $n$  שעבורו סכום  $n$  האיברים הראשונים

בסדרה שווה ל-0.

ג. האם קיים  $n$  טבעי שעבורו:  $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ ? אם כן — מצא  $n$  כזה,

אם לא – נמק.

ד. האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמק

(הבחן בין מקרים שונים).

3. למיכל יש קובייה מאוזנת. על שלוש מפאות הקובייה שלה

כתוב המספר 2, ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4.

גלית יש קובייה מאוזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב

אחד מן המספרים: 1 או 3.

מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים. המשתתפת שתנצח במספר

סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק.

בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת.

המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על

הקובייה שלה גבוה יותר.

נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא  $\frac{7}{12}$ .

א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1? נמק את תשובתך.

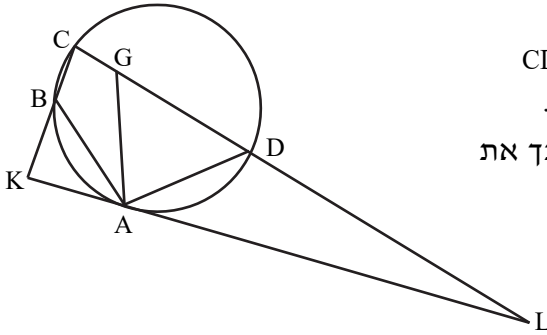
ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?

ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק,

אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?



**פרק שלישי – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור**



4. המרובע ABCD חסום במעגל.

הנקודה G נמצאת על הצלע CD כך ש-  $AB = AG$  וגם  $CB = CG$ .

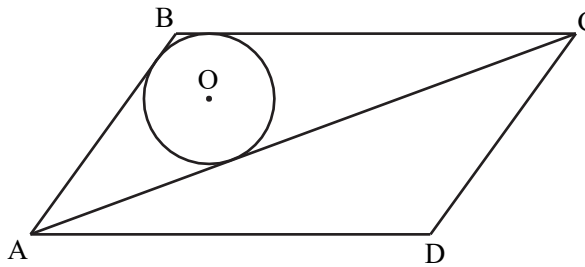
המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD בנקודה L, וחותך את המשך הצלע CB בנקודה K (ראה ציור).

א. הוכח כי  $AD = AG$ .

ב. (1) הוכח כי  $\triangle ABK \sim \triangle CDA$ .

(2) הוכח כי  $AD^2 = BK \cdot CD$ .

ג. הראה כי  $\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{LA}{AK}$ .



5. נתונה מקבילית ABCD.

AC הוא האלכסון הארוך, כמתואר בציור.

במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו O.

נתון: הנקודה O נמצאת

במרחקים 6 ו-3 מן הישרים AD ו-AC בהתאמה;

$$OA = 10$$

א. חשב את גודלי זוויות המקבילית.

ב. חשב את אורך האלכסון AC.

ג. חשב את שטח המקבילית.

**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינום,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונות הפונקציות  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$  ,  $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ .

ענה על סעיף א עבור התחום:  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ .



א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$ ,

המאונכות לציר ה- $x$ .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$

(אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ענה גם על סעיף ב עבור תחום:  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ .

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .

(2) הוכח:  $g(x) = -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ג. מצא את ערך הביטוי  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$  . נמק את תשובתך.



7. נתונה משפחת הפונקציות:  $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-a}$ . הוא פרמטר,  $a \neq 0$ ,  $a \neq 4$ .

ענה על סעיף א. הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך.

הבחן בין  $a > 0$  ובין  $a < 0$  במידת הצורך.



א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.

(3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה  $f(x)$  המקבילה

לציר ה- $x$ .

(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$

המאונכות לציר ה- $x$  (אם יש כאלה).

ענה על סעיף ב. הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך.

הבחן בין  $a > 4$  ובין  $a < 4$  במידת הצורך.

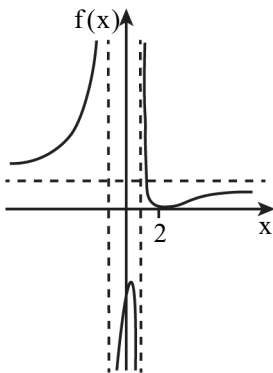
ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

ג. לפניך שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה  $f(x)$ , כל אחד עבור

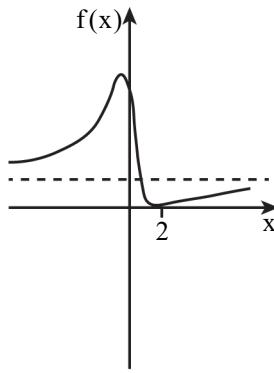
ערך אחר של  $a$ .

כתוב מהו תחום הערכים של  $a$  המתאים לכל אחד מן הגרפים I–III.

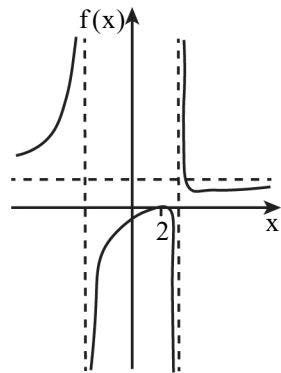
נמק את תשובתך.



III



II



I

8. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ .

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = t$ .  
נתון:  $1 \leq t \leq 5$ .

המשיק חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $A$  ואת ציר ה- $y$  בנקודה  $B$ .  
הנקודה  $O$  היא ראשית הצירים.

א. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש  $AOB$  הוא מינימלי.

ב. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש  $AOB$  הוא מקסימלי.

## תשובות למבחן דוגמה מספר 1 :

1. א. (1)  $x \geq 1.5$  או  $x \leq 1.5$  ;

.  $(x \rightarrow -\infty)y = -2$  ,  $(x \rightarrow +\infty)y = 2$

(2)  $x > 1.5$  או  $x \leq 1.5$  ;

.  $x = 1.5$  ,  $(x \rightarrow -\infty)y = -1$  ,  $(x \rightarrow +\infty)y = 1$

ב.  $AB = \frac{\pi}{4}$  . ג. הוכחה. ד. יש טעות. יש לפסול את הפתרון  $\gamma_2 = 168.18^\circ$  .

2. א.  $a_{12} = 0$  . ב. (1) כן,  $a_{23} = -a_1$  . (2)  $n = 23$  . ג. לא.

ד. אם האיבר הראשון שלילי, הסדרה עולה : 11 איברים שליליים.

אם האיבר הראשון חיובי, הסדרה יורדת : לא ניתן לדעת.

3. א. על פאה אחת. ב.  $0.3466$  . ג.  $0.5533$  .

4. א. הוכחה ב. (1) הוכחה (2) הוכחה ג. הוכחה

5. א.  $125.67^\circ$  ,  $54.33^\circ$  . ב.  $AC = 27.08$  . ג.  $S_{ABCD} = 171.73$  .

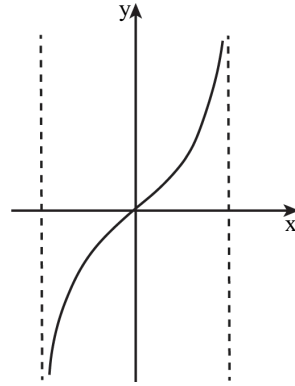
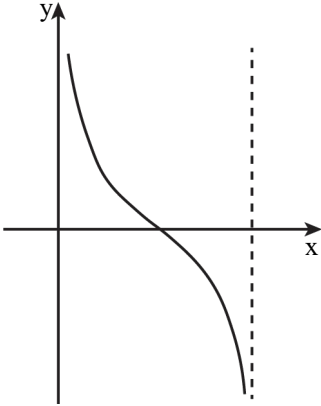
6. א. (1)  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  (2)  $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$

(3) עלייה:  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ . ירידה: אין.

ב. (1)  $0 < x < \pi$

(2) הוכחה.

(3)



(4)

ג. 0.

7. א. (1) עבור  $a < 0$ : כל  $x$ , עבור  $a > 0$ :  $x \neq -\sqrt{a}, x \neq \sqrt{a}$

(2)  $(2, 0), (0, -\frac{4}{a})$  (3)  $y = 1$

(4) עבור  $a < 0$ : אין, עבור  $a > 0$ :  $x = -\sqrt{a}, x = \sqrt{a}$

ב. עבור  $a > 4$ :  $(2, 0)$  מקסימום,  $(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a})$  מינימום.

עבור  $a < 4, a \neq 0$ :  $(2, 0)$  מינימום,  $(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a})$  מקסימום.

ג. I:  $a > 4$ , II:  $a < 0$ , III:  $0 < a < 4$

8. א.  $x = \sqrt{3}$  ב.  $x = 5$



## מבחן דוגמה מספר 2

### פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. נתונה הסדרה:  $a_n = \sin(n\pi + \frac{\pi}{6})$ ,  $n$  טבעי.



(1) רשום שלושה איברים ראשונים בסדרה.

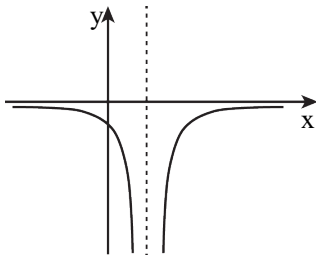
(2) מצא את הסכום של 2019 האיברים הראשונים בסדרה.

ב. לפניכם שלושה גרפים. הגרפים מתאימים לפונקציה  $f(x)$  ולשתי הנגזרות

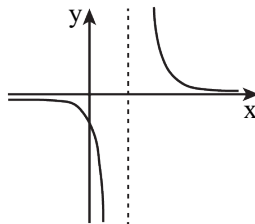


הראשונות שלה:  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ . לשלוש הפונקציות תחום הגדרה זהה.

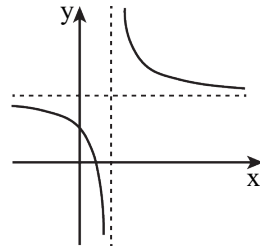
איזה גרף מתאים לכל אחת מהן? נמק את טענתך.



גרף ג



גרף ב



גרף א

ג. נתונות שתי סדרות:  $a_n = n^2 + 2n$ ,  $b_{n+1} = b_n + 2n + 3$ ,  $b_1 = 3$ .



(1) הראה כי  $a_1 = b_1$ . האם  $a_2 = b_2$ ? האם  $a_4 = b_4$ ?

(2) האם הסדרות זהות? אם לא, תן דוגמה.

אם כן, הוכח כי לכל  $n$  טבעי מתקיים  $a_n = b_n$ .

ד. נתון כי  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.



אלו מהפונקציות הבאות הן בהכרח זוגיות. נמק את קביעותך.

$$(1) g(x) = f(x) + 1$$

$$(2) h(x) = f(x + 1)$$

$$(3) k(x) = \sqrt{f(x)}$$

## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2.  $a_n$  היא סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת שסכומה שלילי.

$a_1$  הוא האיבר הראשון בסדרה, ו- $q$  היא מנת הסדרה.



א. לפניך ארבע טענות (IV – I). רק אחת מהן בהכרח נכונה.

ציין את מספרה ונמק.

$$(I) q < 0$$

$$(II) a_1 < 0 \text{ וגם } q < 0$$

$$(III) a_1 < 0$$

$$(IV) a_1 > 0 \text{ או } q < 0$$

נסמן ב- $T$  את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים בסדרה  $a_n$ ,

ונסמן ב- $R$  את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה  $a_n$ .

$p$  הוא פרמטר.

$$\text{נתון: } T + p \cdot R = 0$$

ב. הבע את  $p$  באמצעות  $q$ .

ג.  $b_n$  היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא  $p$ .

האם  $b_n$  היא סדרה מתכנסת? נמק.

ד. נתון:  $p$  שלילי. הראה שלכל  $n$  טבעי  $a_{n+1} > a_n$

(כלומר הראה שהסדרה  $a_n$  היא סדרה עולה).

3. בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון.

37% מן התלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן.

$\frac{35}{37}$  מהם עברו את המבחן.



מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.

א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?

ב. יעל והדס ניגשו למבחן. ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן.

האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.

ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו למבחן.

מהי ההסתברות שבדיוק שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?

ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן.


מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות I-II :

(I) התלמיד נעזר בחבריו.

(II) התלמיד לא עבר את המבחן.

## פרק שלישי – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. ABCD הוא מעוין.

E ו-F הן אמצעי 

צלעות AB ו-BC בהתאמה.

הנקודה K היא מפגש

האלכסונים של המעוין.

מן הנקודה E

העלו אנך ל-AB,

החותך את המשך

האלכסון BD

בנקודה G

(ראה ציור).

א. הוכח: הנקודה G היא

מרכז המעגל החוסם

את המשולש ABC.

הקטע GF חותך את האלכסון AC

בנקודה M, שהיא מרכז המעגל החוסם

את המשולש BDC.

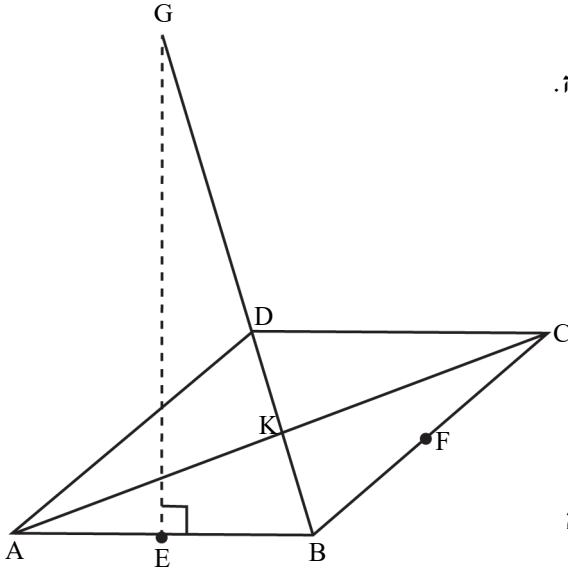
ב. הוכח שהמשולשים MFC, BKC ו-BFG דומים זה לזה.

נסמן ב-R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC,

וב-r את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.

ג. (1) הוכח כי  $\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{CF}$  וכי  $\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}$ .

(2) הראה כי היחס בין אלכסוני המעוין שווה ל- $\frac{r}{R}$ .





5. ABC הוא משולש ישר זווית ( $\angle ABC = 90^\circ$ ).

M היא נקודה על היתר כל ש-  $AM : MC = \sqrt{3} : 4$ .

נתון:  $BM = 8$ ,  $\angle ABM = 30^\circ$ .

א. (1) סמן:  $MC = 4x$  וחשב את זוויות המשולש ABC.

(2) חשב את הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המשולשים

ABM ו-CMB.

ב. נסמן את מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים ABM

ו-CMB ב- $O_1$  ו- $O_2$  בהתאמה.

(1) הסבר מדוע המרובע  $BO_1MO_2$  הוא דלתון.

(2) חשב את אורך הקטע  $O_1O_2$ .

**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינום,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}}$ ,  $a$  הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .



א. הוכח:  $a > 1$ .

ענה על סעיף ב. אם יש צורך, הבע באמצעות  $a$ .

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה

$f(x)$  עם הצירים.

(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$

המקבילות לציר ה- $x$ .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$

(אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתון:  $a = 3$ .

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי ציר ה- $x$ ,

ועל ידי הישרים  $x = \frac{2}{3}$  ו- $x = 2$ .

ד.  $g(x)$  היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל  $x$ .

נסמן ב- $S$  את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = \frac{1}{3}$  ו- $x = b$  ( $b > \frac{1}{3}$ ).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי גרף הפונקציה

$g(x)$  ועל ידי הישרים  $x = \frac{1}{3}$  ו- $x = b$  שווה ל- $2S$  בעבור כל  $b$ .

הבע את  $g(x)$  באמצעות  $f(x)$  בתחום  $x > \frac{1}{3}$  (כתוב את שתי האפשרויות).

אין צורך להוכיח את תשובתך.

7.  $f(x)$  היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל  $x$ , כך ש- $f(x) \neq 0$  לכל  $x$ .

א. הוכח שאם הפונקציה  $f(x)$  עולה בקטע מסוים,

אז הפונקציה  $\frac{1}{f(x)}$  יורדת באותו הקטע;

ואם הפונקציה  $f(x)$  יורדת בקטע מסוים,

אז הפונקציה  $\frac{1}{f(x)}$  עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה  $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$ , המוגדרת לכל  $x$ .

ב. האם קיים  $x$  שבעבורו  $g(x) = 0$ ? נמק.

ג. (1) האם הפונקציה  $g(x)$  היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל  $x$  מתקיים:  $g(x) = g(x + 2\pi)$ .

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$

בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ , וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $-\pi \leq x \leq 3\pi$ .

נתונה הפונקציה  $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$ .

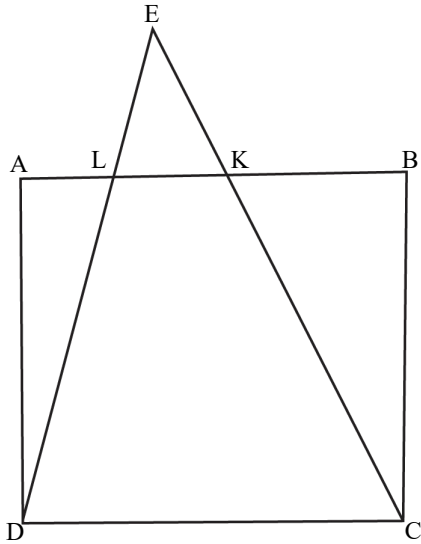
ענה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ד. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $h(x)$ ? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$  בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$

באותה מערכת צירים שבה סרטטת את גרף הפונקציה  $g(x)$ .





8. ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ.

K ו-L הן נקודות על הצלע AB.



נתון כי הישרים CK ו-DL

חותכים זה את זה בנקודה E,

הנמצאת מחוץ לריבוע ABCD

(ראה ציור).

נסמן:  $LK = x$ .

א. הבע באמצעות  $x$  את

גובה המשולש KLE.

ב. עבור איזה ערך של  $x$  סכום

שטחי המשולשים BCK, ADL

ו-KLE הוא מינימלי? נמק.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

## תשובות למבחן דוגמה מספר 2:

1. א. (1)  $a_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_3 = -\frac{1}{2}$  (2)  $(-\frac{1}{2})$ .

ב. גרף א-  $f(x)$ , גרף ב-  $f''(x)$ , גרף ג-  $f'(x)$ .

ג. (1) כן,  $a_1 = b_1 = 3$ ,  $a_2 = b_2 = 8$ ,  $a_4 = b_4 = 24$  (2) הוכחה.

ד.  $g(x)$  - פונקציה זוגית,  $h(x)$  - לא בהכרח זוגית,  $k(x)$  - פונקציה זוגית.

2. א. טענה III

(סכום הסדרה הוא  $\frac{a_1}{1-q}$ , כמו כן  $-1 < q < 1$ , לכן כש-  $a_1$  שלילי הסכום שלילי)

ב.  $P = -\frac{1}{q}$ . ג. לא מתכנסת ( $-1 < q < 1$ )  $\leftarrow p > 1$  או  $p < -1$ . ד. הוכחה.

3. א.  $\frac{2}{9}$ . ב. כן,  $(\frac{35}{37} > \frac{56}{63})$ . ג. 0.1763. ד. 0.44.

4. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. (1) הוכחה. (2) הוכחה.

5. א. (1)  $90^\circ$ ,  $36.87^\circ$ ,  $53.13^\circ$ .

(2) רדיוס המעגל החוסם את  $\triangle ABM$ : 5,

רדיוס המעגל החוסם את  $\triangle CBM$ :  $6\frac{2}{3}$ .

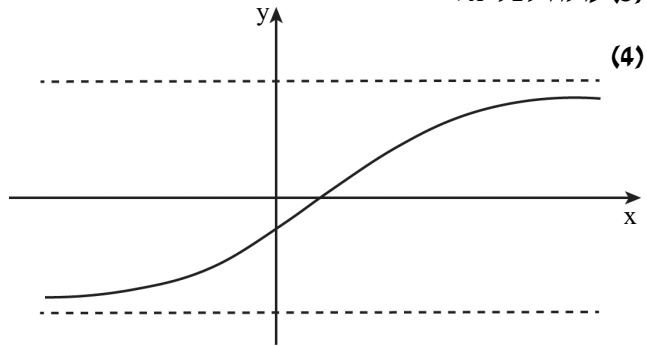
ב. (1)  $BO_1 = MO_1 = 5$ ,  $BO_2 = MO_2 = 6\frac{2}{3}$  (2)  $8\frac{1}{3}$ .

6. א. הוכחה.

ב. (1)  $(\frac{1}{a}, 0)$  (2)  $(0, -1)$  .  $(x \rightarrow +\infty)y = \sqrt{a}$  ,  $(x \rightarrow -\infty)y = -\sqrt{a}$  .

(3) עולה לכל  $x$  .

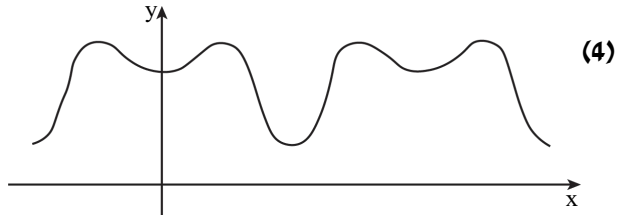
- ג. 2 .  
 ד.  $g(x) = -f(x)$  ,  
 .  $g(x) = 3f(x)$



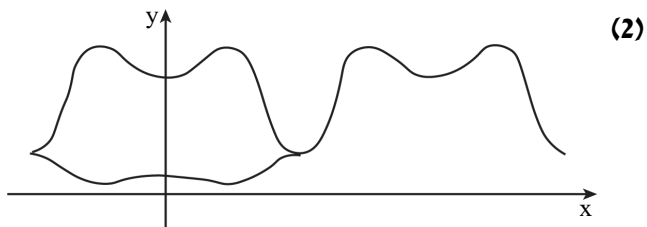
7. א. הוכחה. ב. לא  $(2 + \sin^2 x \geq 2, \cos x \geq -1)$  לכן סכומם גדול מ-1 או שווה לו ולכן לא יכול להיות שווה 0 .

ג. (1) כן  $(\cos x - 1 \sin^2 x)$  הן פונקציות זוגיות). (2) הוכחה.

(3) מינימום,  $(\frac{\pi}{3}, 3\frac{1}{4})$  מקסימום,  $(\pi, 1)$  מינימום.



ד. (1) כל  $x$  .



8. א.  $\frac{6x}{6-x}$  . ב.  $6 - 3\sqrt{2} \approx 1.76$  .



## מבחן דוגמה מספר 3

### פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. בסדרה מתקיים  $a_{n+1} = a_n + 3n + 3n^2$

(1) הוכח:

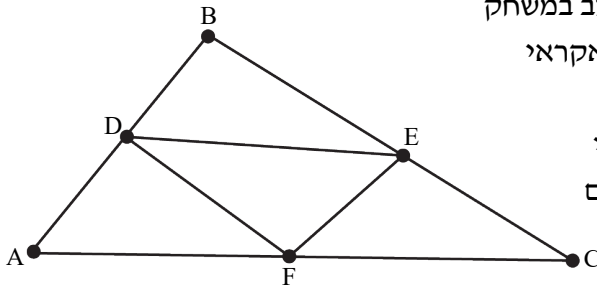


אם ידוע כי עבור  $k$  טבעי מסוים מתקיים:  $a_k = k^3 - k + 2$

$$a_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) + 2 \text{ אז}$$

(2) האם מתשובתך לסעיף א (1) נובע:

שלכל  $n$  טבעי בסדרה, בהכרח מתקיים  $a_n = n^3 - n + 2$ .



ב. במשחק מחשב בכל שלב במשחק

מופיעה דמות במקום אקראי

על גבי משטח משולש.

המשולש מחולק על ידי

שלושת קטעי האמצעים

ל-4 משולשים.



מהי ההסתברות שהדמות מופיעה בתוך המקבילית DFCE?

ג. בדוק נכונות/ אי נכונות הטענה הבאה. אם הטענה נכונה - הוכח אותה, אם לא הצג דוגמה נגדית.



אם זווית  $\alpha$  -  $\beta$  של משולש מקיימות את השוויון  $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$  אז המשולש הוא שווה שוקיים.

ד. לפניך שלוש פונקציות:



$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x + 2)}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

$$h(x) = \frac{x^3 - 1}{(x - 2)(x + 1)}$$

לאיזה מהן התכונה הבאה:

לפונקציה יש שתי נקודות אי הגדרה, אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת.

נמק בחירתך על ידי הסבר להתאמה ועל ידי פסילת האחרות.



## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. הסדרה  $a_n$  מוגדרת לכל  $n$  טבעי על ידי כלל הנסיגה:

$$. c > 0 : \text{נתון} : a_1 = -\frac{1}{c}, a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}$$



א. הוכח כי האיברים בסדרה  $a_n$  הנמצאים במקומות האי-זוגיים

מהווים סדרה הנדסית, וכי האיברים בסדרה  $a_n$  הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים גם הם סדרה הנדסית.

ב. (1) רשום את 7 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ .

הבע את תשובתך באמצעות  $c$  אם יש צורך.

(2) הבע באמצעות  $c$  את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ .

(3) הוכח שלכל  $n$  טבעי, הסכום של  $2n-1$  האיברים הראשונים

בסדרה  $a_n$  אינו תלוי ב- $n$ .

ג. הסדרה  $b_n$  מוגדרת באופן הזה:  $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$ .

(1) הראה כי  $b_n$  היא סדרה הנדסית.

(2) מהו תחום הערכים של  $c$  שבעבורם  $b_n$  היא סדרה יורדת?

(3) נתון שהסדרה האי-סופית  $b_n$  היא סדרה יורדת.

הבע באמצעות  $c$  את סכומה.

3. במבחן רב-ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.

לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.

התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.



תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.

תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.

כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.

(1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

(2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה, ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

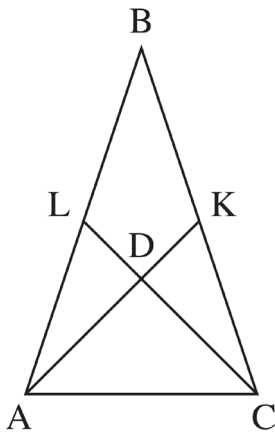
ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.

בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש-k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן.

מצא את k. נמק.

## פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4.  $ABC$  הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = BC$ ).

$AK$  ו- $CL$  הם תיכונים במשולש,

החותכים זה את זה בנקודה  $D$ .

נתון:  $AK \perp CL$ .

א. הוכח:  $BD = AC$ .

ב. חשב את היחס  $\frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}}$ .

ג.  $M$  הוא מרכז המעגל החוסם את

המרובע  $ALKC$ .

(1) הוכח:  $\angle AML = 90^\circ$ .

(2) מצא את היחס  $\frac{AM}{AD}$ . תוכל להשאיר שורש בתשובתך.



5.  $ABC$  הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ).

$BD$  הוא חוצה זווית במשולש  $ABC$ .

המשך הקטע  $BD$  חותך את המעגל החוסם את המשולש  $ABC$  בנקודה  $E$ .

גודל הזווית  $ABC$  הוא  $2\beta$ .

א. הבע באמצעות  $\beta$  את  $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$ , היחס בין שטח המשולש  $ABC$

ובין שטח המשולש  $ADE$ . אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלת.

נתון:  $BE$  שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש  $ABC$ .

ב. חשב את היחס  $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$ .

נסמן ב- $a$  את אורך השוק  $AB$ .


ג. הבע באמצעות  $a$  את רדיוס המעגל החוסם על ידי המשולש  $ABC$ .

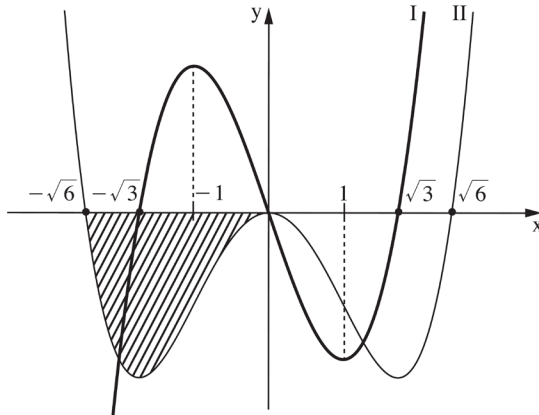
בתשובותיך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינום,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. לפניך הגרפים של הפונקציות  $f'(x)$  ו- $f''(x)$  (פונקציית הנגזרת הראשונה

ופונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה  $f(x)$ ) בתחום  $-2.5 \leq x \leq 2.5$ . שני הגרפים עוברים בראשית הצירים. 



א. התאם בין הגרפים I ו-II ובין הפונקציות  $f'(x)$  ו- $f''(x)$ . נמק.

ב. (1) כמה נקודות קיצון פנימיות יש לפונקציה  $f(x)$  בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה  $f(x)$  בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.

ג. עבור איזה ערך של  $x$  בתחום  $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$  שיפוע המשיק לגרף פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ , הוא מינימלי?

נתון:  $f(x)$  היא פונקציה אי-זוגית.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתון: ערך הפונקציה  $f(x)$  בנקודת המקסימום שלה הוא  $t$ .

ה. הבע באמצעות  $t$  את השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי החלק השלילי של ציר ה- $x$  (השטח המקווקו בציור).

ו. נתון: קיימים  $a$ ,  $b$  ו- $c$  ממשיים כך ש- $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$ .

מצא את  $c$  ואת היחס  $\frac{a}{b}$ .

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$ , ונתון התחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

בתחום הנתון ענה על הסעיפים א ו-ב.



א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) האם הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית או אי-זוגית? נמק.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ ,

וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. נתונה הפונקציה  $g(x) = f(x) - a$ .

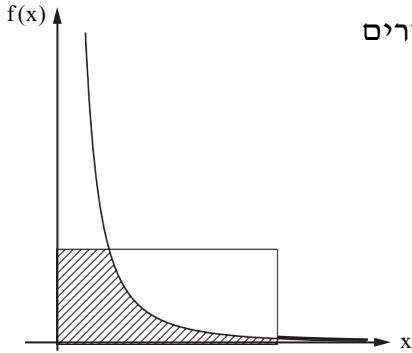
(1) מצא את הערכים האפשריים של  $a$  שעבורם יש

למשוואה  $f(x) - a = 0$  פתרון אחד בלבד.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$  עבור כל אחד מהערכים

של  $a$  שמצאת בתת סעיף ב(1).

8. בציר שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  בתחום  $x > 0$ ,



ומלבן ששתיים מצלעותיו נמצאות על הצירים  
והוא נמצא ברביע הראשון.



נתון: שטח המלבן הוא 4.

נסמן ב-  $a$  את אורך צלע המלבן שנמצאת

על ציר ה- $x$ . נתון:  $a \geq \frac{1}{4}$ .

א. הבע באמצעות  $a$  את השטח המוגבל

על ידי הצירים, על ידי צלעות

המלבן ועל ידי גרף הפונקציה  $f(x)$

(השטח המקווקו בציר).

ב. עבור איזה ערך של  $a$  השטח שמצאת בסעיף א הוא מקסימלי?

### תשובות למבחן דוגמה מספר 3:

1. א. (1) הוכחה. (2) לא.

ב.  $\frac{1}{2}$ . ג. הטענה אינה נכונה, לדוגמה:  $\gamma = 90^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 70^\circ$ .

ד. לפונקצייה  $f(x)$ , הסבר.

2. א. הוכחה.

ב. (1)  $a_1 = -\frac{1}{c}$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = -1$ ,  $a_4 = c$ ,  $a_5 = -c$ ,  $a_6 = c^2$ ,  $a_7 = -c^2$ .

(2)  $S_7 = -\frac{1}{c}$ . (3) הוכחה.

ג. (1) הוכחה. (2)  $c > 1$ . (3)  $\frac{2c}{1-\frac{1}{c}}$  או  $\frac{2c^2}{c-1}$ .

3. א. (1)  $\frac{27}{64}$ . (2)  $\frac{37}{64}$ . ב.  $\frac{4}{9}$ . ג.  $k = 2$ .

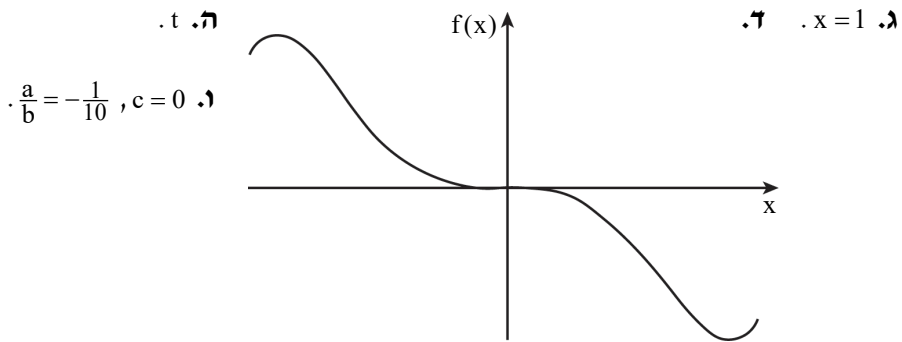
4. א. הוכחה. ב.  $\frac{S_{BLDK}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3}$ . ג. (1) הוכחה. (2)  $\frac{AM}{AD} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = 0.79$ .

5. א.  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{\sin 2\beta \sin 3\beta \sin 4\beta}{\sin^3 \beta}$ . ב. 20.99. ג.  $0.165a$ .

6. א. I:  $f''(x)$ , II:  $f'(x)$ .

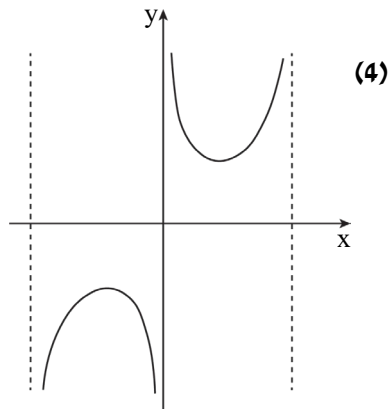
ב. (1) 2 (כמספר נקודות החיתוך של  $f'(x)$  עם ציר x)

(2) 3 (כמספר נקודות החיתוך של  $f''(x)$  עם ציר x).

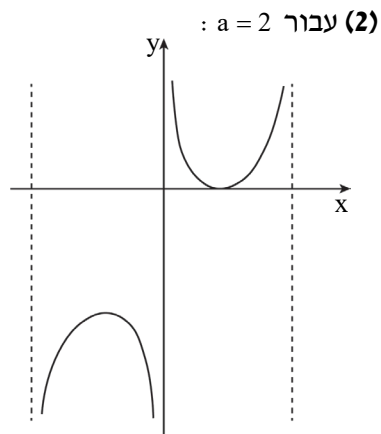
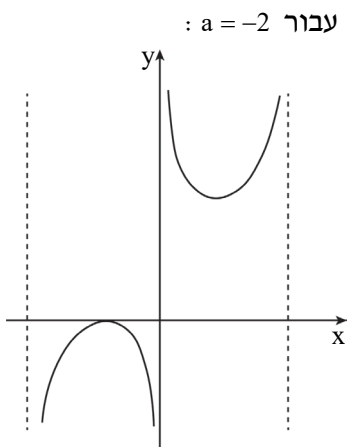


7. א. (1)  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  או  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ . (2) אי זוגית. (3)  $(\frac{\pi}{4}, 2)$  מינימום,

מקסימום.  $(-\frac{\pi}{4}, -2)$



ב. (1)  $a=2, a=-2$ .



8. א.  $\frac{4}{\sqrt{a}} - \frac{1}{a} = \frac{4\sqrt{a}-1}{a}$ . ב.  $a = \frac{1}{4}$ .





## מבחן דוגמה מספר 4

### פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. משולש חסום במעגל שאורך הרדיוס שלו 6 ס"מ.

אורך אחת הצלעות של המשולש: 4 ס"מ.

(1) כמה משולשים כאלה יש?

(2) מצא את אורך השוק במשולש שווה שוקיים שמקיים את התנאים הנ"ל.

הבחן בין שני מקרים.



ב.

הגרף המצורף מתאר את גרף

הנגזרת  $f'(x)$  של הפונקציה  $f(x)$

בתחום  $0 < x < 9$ .

נתון:  $f(6)=0$ ,  $f(8)=2$ ,

$f(2)=-10$ ,  $f(4)=-1$ .

(1) האם לפונקציה  $f(x)$

יש נקודות קיצון?

אם כן- רשום את

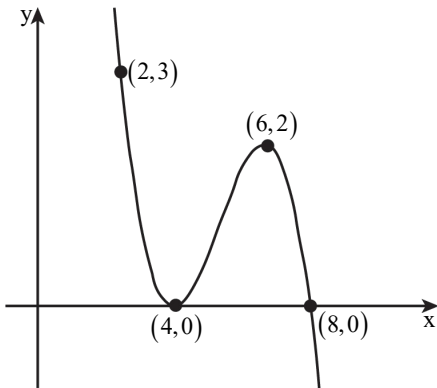
שיעורי נקודות הקיצון

ואת סוגן. נמק.

(2) האם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודות פיתול?

אם כן- רשום את שיעורי נקודות הפיתול

ואת משוואות המשיקים העוברים דרכן.



ג. נתונה הפונקציה  $f(x)=x^5+3x+1$ .



(1) מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם קיימים)?

הוכח קביעתך.

(2) הסתמך על תשובתך, וקבע כמה פעמים חותך גרף הפונקציה

את ציר ה- $x$ . נמק את קביעתך.

ד. נתונה סדרה הנדסית אינסופית, שאיבריה הם:  $a_1, a_2, a_3, \dots$ .



כל האיברים בסדרה שונים מ-0.

מגדירים סדרה חדשה בה מתקיים  $b_n = \frac{1}{a_n}$  לכל  $n$  טבעי.

(1) הוכח כי גם הסדרה החדשה היא סדרה הנדסית.

(2) האם ייתכן כי שתי הסדרות הן סדרות אינסופיות מתכנסות?

הסבר תשובתך.

## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. נתונה סדרה חשבונית  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+3}$  ובה  $2n+3$  איברים

( $n$  הוא מספר טבעי).

סכום הסדרה גדול פי 43 מן האיבר האמצעי. האיבר האמצעי שונה מ-0.



א. (1) הראה כי סכום הסדרה שווה ל-  $(2n+3) \cdot a_{n+2}$ .

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה.

ב. ידוע כי בסדרה הנתונה סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים

גדול ב-40 מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(1) מצא את האיבר האמצעי.

(2) מצא את סכום הסדרה.

נתון כי הפרש הסדרה הנתונה הוא  $-a_1$ .

ג. קבע אם הסדרה עולה או יורדת.

מכל איברי הסדרה הנתונה בונים סדרה חדשה על ידי חיבור של כל  $k$  איברים

סמוכים ( $k$  הוא מספר טבעי) באופן הזה:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k), (a_2 + a_3 + \dots + a_{k+1}), (a_3 + a_4 + \dots + a_{k+2}), \dots$$

ד. הבע באמצעות  $k$  את מספר האיברים בסדרה החדשה.

3. בבית ספר תיכון ניגשים תלמידי שכבת י"ב לבחינת המתכונת באזרחות

ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות.



נתון: גם בשנת 2017 וגם בשנת 2018 מספר התלמידים שעברו

את בחינת המתכונת ונכשלו בבחינת הבגרות היה שווה

למספר התלמידים שנכשלו בבחינת המתכונת ועברו את בחינת הבגרות.

א. בשנת 2017 ניגשו 250 תלמידים לבחינת המתכונת ולאחר מכן לבחינת

הבגרות באזרחות. ידוע שאם תלמיד עבר את בחינת המתכונת,

ההסתברות שהוא עבר את בחינת הבגרות היא 0.9.

שיעורם של הנכשלים בבחינת הבגרות מכלל התלמידים שניגשו

לבחינה בשנה זו היה 20%.

(1) מהו מספר התלמידים שעברו גם את בחינת המתכונת

וגם את בחינת הבגרות?

(2) ידוע שתלמיד מסוים נכשל בבחינת המתכונת.

מהי ההסתברות שאותו תלמיד עבר את בחינת הבגרות?

(3) בוחרים באקראי (עם החזרה) שני תלמידים שנכשלו בבחינת הבגרות.

מהי ההסתברות ששניהם נכשלו גם בבחינת המתכונת?

ב. נתון כי בשנת 2018 לא הייתה תלות בין המאורע

"עובר את בחינת המתכונת"

לבין המאורע "עובר את בחינת הבגרות", וכי ההסתברות שתלמיד עבר את

בחינת הבגרות בשנה זו היא  $a$  ( $0 < a < 1$ ).

הבע באמצעות  $a$  את ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת המתכונת

ונכשל בבחינת הבגרות בשנה זו.

פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. המשולש BCF חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

BF הוא קוטר המעגל.

מן הנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל –

האחד משיק מעגל בנקודה B

והאחר חותך את המשך הצלע CF

בנקודה D, כמתואר בציור שלפניך.

נתון:  $AD \perp CD$ .

א. הוכח:  $\angle BFC = \angle BAD$ .

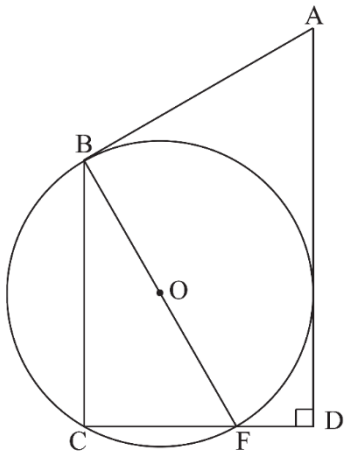
נתון: K היא נקודה על הצלע BC,

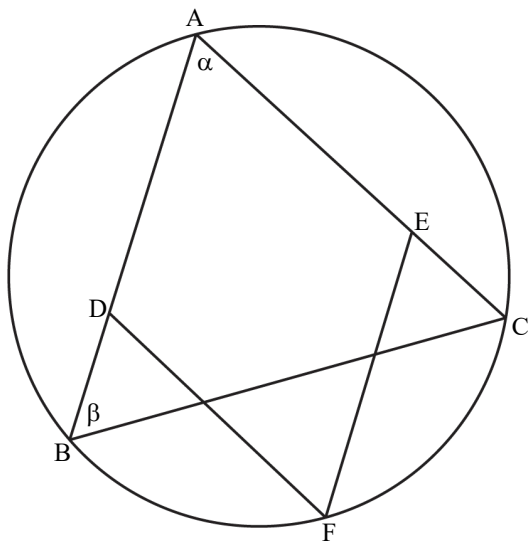
כך ש-FK חוצה את  $\angle BFC$ .

ב. הוכח:  $KC = \frac{CF \cdot BO}{AB}$ .

ג. הוכח:  $KB \cdot AB = 2R^2$ .

ד. הסבר מדוע שטח  $\triangle BFK$  גדול משטח  $\triangle KFC$ .





5. ABC הוא משולש

החסום במעגל שרדיוסו R.

הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AB ו-AC בהתאמה,

והנקודה F נמצאת על

הקשת BC

כך שהמרובע ADFE

הוא מעוין (ראה ציור).

נתון:  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$

את  $\angle ABF$ .

(2) הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$

את אורך האלכסון AF.

ב. הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורך צלע המעוין.

נתון כי AF הוא קוטר במעגל.

ג. הראה כי שטח המעוין הוא  $2R^2 \tan \frac{\alpha}{2}$ .

נתון כי רדיוס המעגל החסום במעוין ADFE הוא  $\frac{3}{5}R$ .

ד. חשב את  $\beta$ .

**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתון: הפונקציה  $g''(x) = -\frac{18}{x^4} + \frac{18}{(x-4)^4}$  היא פונקציית הנגזרת השנייה

של פונקציה  $g(x)$ .

הפונקציות  $g(x)$ ,  $g'(x)$ ,  $g''(x)$  מוגדרות באותו התחום.



נתון כי משוואת המשיק לפונקציה  $g(x)$  בנקודת הפיתול שלה היא  $y = \frac{3}{2}x - 3$ .

א. (1) מצא את הפונקציה  $g(x)$ .

(2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$ .

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

נגדיר:  $h(x) = |g(x)|$ .

ב. באותה מערכת צירים שבה סרטטת סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ ,

הוסף בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$ .

ג. נתון כי  $\int_a^2 g(x) dx = t$ ,  $0 < a < 2$ ,  $t$  הוא פרמטר.

הבע באמצעות  $t$  את  $\int_a^2 (h(x) - g(x)) dx$ .

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x - 1$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ .

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.



(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

גרף הפונקציה  $f(x)$  הוזז שמאלה ב- $\frac{\pi}{2}$  כך שהתקבלה פונקציה  $g(x)$

המוגדרת בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

ב. (1) בטא את הפונקציה  $g(x)$  באמצעות הפונקציה  $f(x)$ .

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

(3) הוכח כי  $g(x)$  היא פונקציה זוגית.

לפניך שלושה ביטויים, I - III:

$$I: \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x + \pi) dx, \quad II: \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x + \frac{\pi}{2}) dx, \quad III: \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x - \frac{\pi}{2}) dx$$

ג. ציין איזה מן הביטויים I - III שווה ל- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

נמק את תשובתך. אין צורך בחישוב.

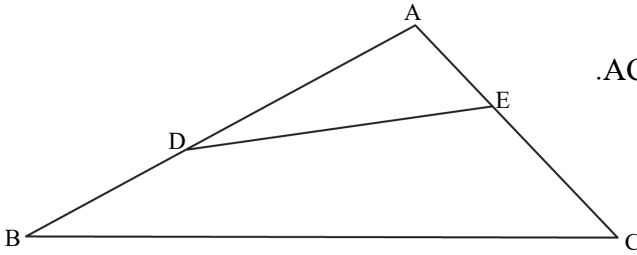


8.

במשולש ABC

נתון:  $AB = 30$ ,  $AC = 20$ .

$\angle CAB = \alpha$ .



$\alpha$  הוא קבוע.

הנקודה D נמצאת

על הצלע AB

והנקודה E נמצאת על הצלע AC

(ראה ציור).

נתון: שטח המשולש ADE שנוצר באופן הזה הוא רבע

משטח המשולש ABC

סמן את אורך הקטע AD ב-  $x$ .

א. הבע באמצעות  $x$  את אורך הקטע AE.

ב. (1) הבע באמצעות  $\alpha$  את האורך המינימלי של הקטע DE.

(2) הסק מתת-סעיף ב(1) את הערך של  $x$

שבעבורו היחס  $\frac{DE}{BC}$  הוא מינימלי. הסבר.

תשובות למבחן דוגמה מספר 4 :

1. א. (1) אינספור, כל עוד הזוויות הן  $19.47^\circ$  ו- $160.53^\circ$ .

(2) 4 ס"מ, 11.83 ס"מ או 2.029 ס"מ.

ב. (1) (8, 2) מקסימום. (2)  $(4, -1) : y = -1$ ,  $(6, 0) : y = 2x - 12$ .

ג. (1) עולה: כל  $x$ , יורדת: אף  $x$ . (2) פעם אחת. ד. (1) הוכחה. (2) לא ייתכן.

2. א. (1) הוכחה. (2) 43. ב. (1) 40. (2) 1720. ג. עולה. ד.  $44 - k$ .

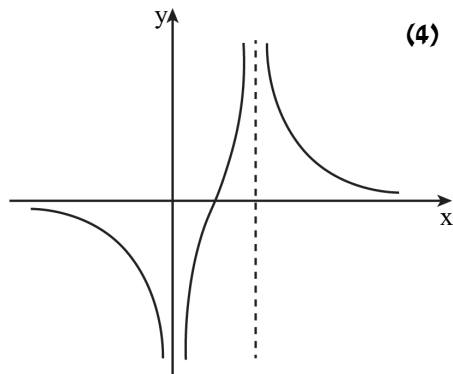
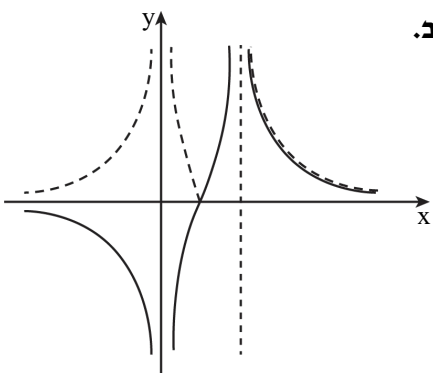
3. א. (1) 180 תלמידים. (2) 0.4. (3) 0.36. ב.  $a - a^2$ .

4. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד.  $S_{\Delta BFK} > S_{\Delta KFC}$ . נימוק.

5. א. (1)  $\beta + \frac{\alpha}{2}$ . (2)  $2R \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)$ . ב.  $\frac{R \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ . ג. הוכחה. ד.  $53.13^\circ$ .

6. א. (1)  $g(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{(x-4)^2}$ . (2)  $x \neq 0, x \neq 4$ .

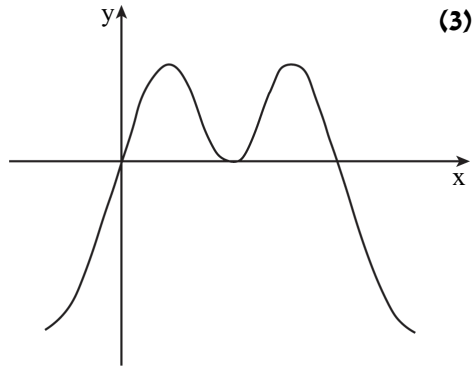
(3) ירידה:  $4 < x$  או  $x < 0$ , עליה:  $0 < x < 4$ .



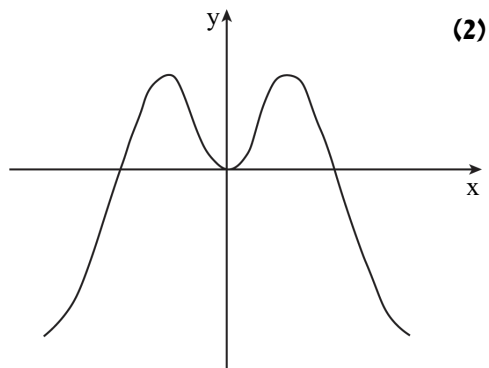
ג.  $-2t$ .

.  $(0,0)$  ,  $(\frac{\pi}{2},0)$  ,  $(\pi,0)$  **(1) א .7**

.  $\min(-\frac{\pi}{2}, -4)$  ,  $\max(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$  ,  $\min(\frac{\pi}{2}, 0)$  ,  $\max(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2})$  ,  $\min(\frac{3\pi}{2}, -4)$  **(2)**



.  $g(x) = f(x + \frac{\pi}{2})$  **(1) ב .7**



**(3) הוכחה . ג. ביטוי II .**

.  $\sqrt{150}$  **(2)** .  $\sqrt{300-300\cos\alpha}$  **(1) ב .**  $\frac{150}{x}$  **.א .8**



## מבחן דוגמה מספר 5

### פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.



א. נתונה פונקציה  $f(x)$ ,

המוגדרת לכל  $x$ .

חלק מגרף הפונקציה מוצג

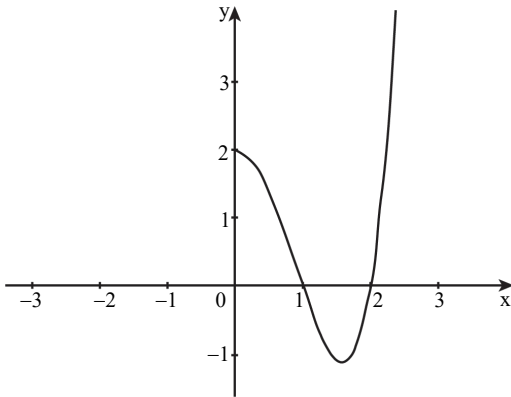
בסרטוט כאשר  $x \geq 0$ .

(1) השלם את הסרטוט

אם הפונקציה היא זוגית.

(2) האם ייתכן שהפונקציה

היא אי-זוגית?



ב. נתונה סדרה הנדסית  $a_1, a_2, a_3, \dots$ .

(1) הוכח שלכל שלושה איברים:  $a_{n-k}, a_n, a_{n+k}$  ( $n > k > 0$ )

מתקיים:  $a_n^2 = a_{n+k} \cdot a_{n-k}$ .

(2) נתון כי בסדרה ההנדסית יש  $2n+1$  איברים.

מכפלת איברי הסדרה היא  $9^9$  האיבר האמצעי שווה ל-9.

חשב את מספר האיברים בסדרה.

ג. מצא את הערכים האפשריים של  $x$ ,  
 עבורם ערכו של הסכום האינסופי הבא:

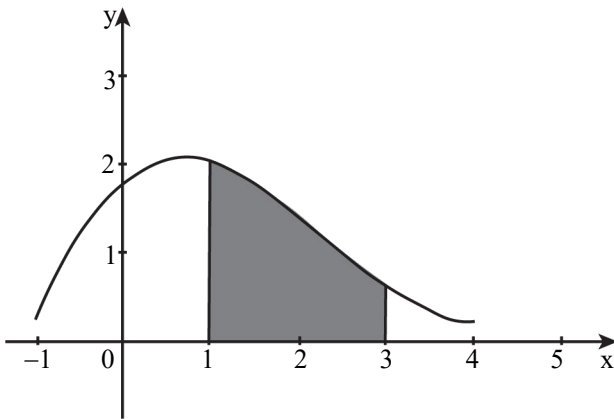


$$\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \dots \text{ הוא } \frac{1}{3}.$$

ד. נתון  $\int_1^3 f(x) dx = s$



אם ניתן, רשום ביטוי לערכים של האינטגרלים הבאים: נמק קביעתך.



$$\int_4^6 f(x-3) dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 f(x+3) dx \quad (2)$$

$$\int_3^6 f(x-2) dx \quad (3)$$

$$\int_2^4 f(x-1) dx \quad (4)$$

## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2.  $a_n$  היא סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא  $q$ .  $|q| \neq 1$ .

נתון:  $a_3 \cdot a_7 = 1$ .

א. חשב את  $a_5$  (מצא את שתי האפשרויות).

נתון:  $a_5 > 0$ .

ב. (1) הבע את  $a_1$  באמצעות  $q$ .

(2) האם קיים  $n$  טבעי שעבורו  $a_n = \frac{1}{a_1}$ ?

אם כן- מצא אותו. אם לא- נמק.

(3) האם קיים  $n$  טבעי שעבורו  $a_n = \frac{1}{a_{13}}$ ?

אם כן- מצא אותו. אם לא- נמק.

ג. (1) הבע באמצעות  $q$  את 7 האיברים הראשונים של הסדרה  $a_n$ .

(2) נתון:  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = 1$  ( $k$  הוא מספר טבעי).

מצא את הערך של  $k$ ,

והסבר מדוע הוא הערך האפשרי היחיד של  $k$ .

3. גלי ונטע משחקות משחק ובו אפשר לקבוע את מספר הסיבובים.

בכל סיבוב אחת מהן זוכה והאחרת מפסידה.

המנצחת במשחק כולו תהיה זו שתזכה ביותר סיבובים מחברתה.

אם לשתייהן מספר שווה של זכיות בסיבובים, התוצאה במשחק כולו תהיה תיקו.

נתון: בכל סיבוב הסיכוי של נטע לזכות הוא  $\frac{1}{3}$ .

א. ביום ראשון שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק.

(1) מהי ההסתברות שנטע ניצחה במשחק כולו?

(2) מהי ההסתברות לתוצאת תיקו במשחק כולו?

ב. גם ביום שני שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק. הפעם הן החליטו

מראש שאם התוצאה במשחק של 4 הסיבובים תהיה תיקו- הן ישחקו

עוד 3 סיבובים כדי להכריע את תוצאת המשחק, ומי שתזכה ביותר

סיבובים, תנצח במשחק כולו.

מהי ההסתברות שנטע תנצח במשחק כולו?

ג. ידוע שנטע ניצחה במשחק כולו בדיוק באחד משני הימים:

ראשון או שני.

מהו הסיכוי שהיא ניצחה במשחק כולו ביום שני?



## פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. EG הוא מיתר במעגל שמרכזו M ורדיוסו r.

דרך נקודות E ו-G העבירו משיקים למעגל.

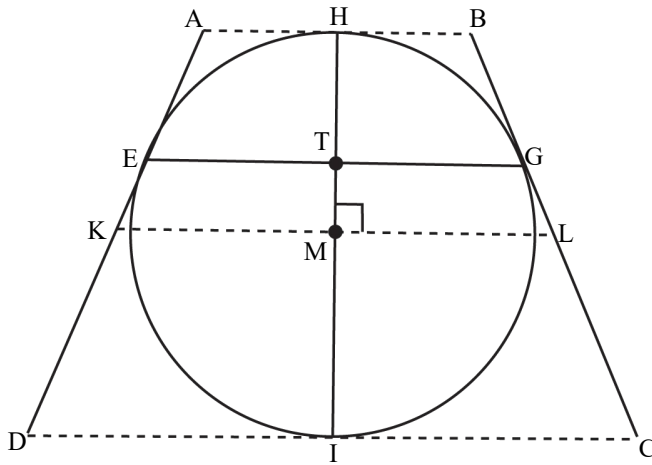
דרך מרכז המעגל, M, העבירו ישר המקביל למיתר EG וחותך את

המשיקים בנקודות K ו-L, כמתואר בציור.

דרך מרכז המעגל, M, העבירו אנך ל-KL אשר חותך את המיתר EG בנקודה T

ואת המעגל בנקודות H ו-I, כמתואר בציור.

נסמן:  $TG = a$ .



א. (1) הוכח:  $TG \cdot ML = MG^2$ .

(2) הבע את אורך הקטע KL באמצעות a ו-r.

דרך הנקודות H ו-I העבירו משיקים למעגל כך שנוצר

טרפז שווה שוקיים ABCD שחוסם את המעגל, כמתואר בציור.

ב. (1) הוכח  $BC = KL$ .

(2) הבע את היקף הטרפז ABCD באמצעות a ו-r.

ג. האם היחס בין היקף הטרפז ABCD והיקף המעגל

יכול להיות קטן מ- $\frac{4}{\pi}$ ? נמק.

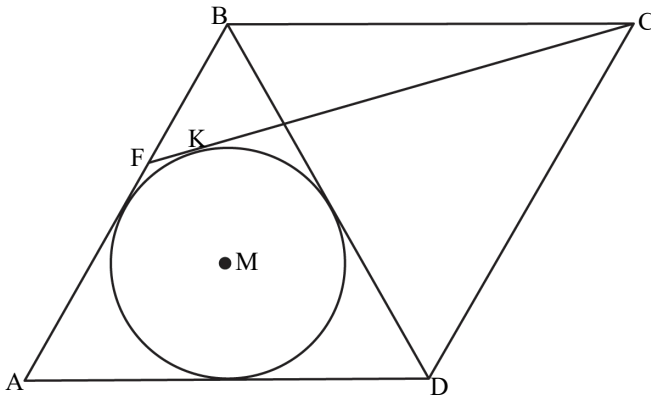


5. ABCD הוא מעוין שאורך צלעו הוא a .

נתון:  $\angle BAD = 60^\circ$  .

במשולש ABD חסום מעגל שמרכזו M .

מן הקודקוד C העבירו משיק למעגל שהמשכו חותך את הצלע AB בנקודה F והוא משיק למעגל בנקודה K (ראה ציור).



א. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.

ב. (1) הסבר מדוע הנקודה M נמצאת על אלכסון המעוין AC .

(2) חשב את גודל הזווית ACF .

ג. הבע באמצעות a את שטח המשולש ACF .

**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות של פונקציות**

6. נתונה משפחת הפונקציות  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{2x - a}$ .

a הוא פרמטר המקיים  $-4 < a < 2$ .



א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) הסבר מדוע לפונקציה  $f(x)$  אין אסימפטוטה מקבילה לציר ה-y.

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$

המקבילות לציר ה-x.

(4) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$

עם הצירים.

(5) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. (1) הבע באמצעות a את שיעורי ה-x שבעבורם  $f'(x) = 0$

(אם יש כאלה).

(2) מצא את הערך של a שבעבורו  $f'(x) \neq 0$  לכל x בתחום ההגדרה.

הצב  $a = -1$  במשוואת הפונקציה  $f(x)$  וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. (1) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$

(אם יש כאלה)?

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ד. חשב את  $\int_3^4 \frac{1}{f(x)} dx$ . תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 \sin x$  המוגדרת בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

א. (1) קבע אם הפונקציה  $f(x)$  היא זוגית או אי-זוגית



או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$

עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.

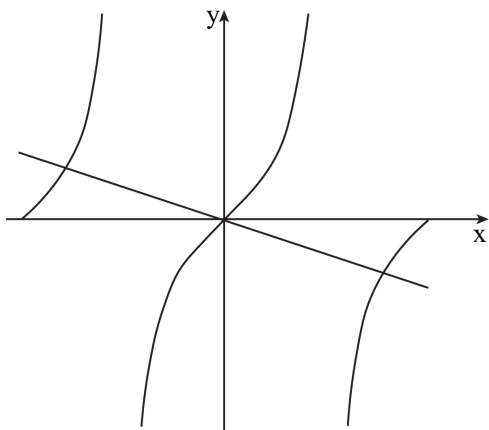
(3) הסבר מדוע הפונקציה  $f(x)$  היא אי-שלילית בתחום הנתון.

(4) קבע אם פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ , היא זוגית או אי-זוגית

או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

ב. (1) הראה ששיעורי ה- $x$  שעבורם  $f'(x) = 0$  מקיימים  $\tan x = -\frac{1}{3}x$ .

(2) בצויר שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות



$$g(x) = \tan x \text{ ו- } h(x) = -\frac{1}{3}x$$

בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

היעזר בצויר,

וקבע כמה נקודות

בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$

מקיימות  $f'(x) = 0$ .

נתון שיעור ה- $x$  של אחת

מנקודות הקיצון של

הפונקציה  $f(x)$  הוא 2.46 בקירוב.

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור התחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

ג. (1) מהם שיעורי ה- $x$  של כל נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$

בתחום? נמק וקבע את סוגן

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ , בתחום.

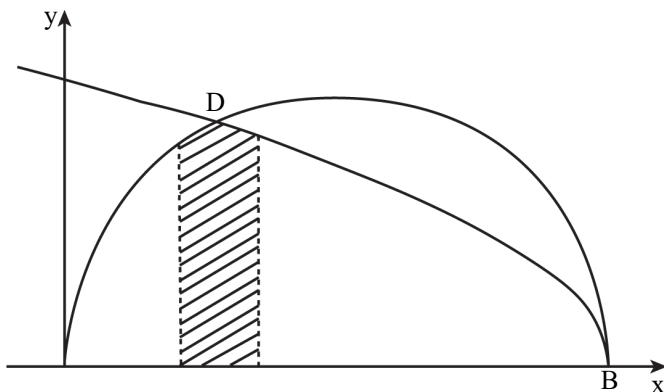
(2) כמה נקודות פיתול לכל הפחות יש לפונקציה  $f(x)$  בתחום? נמק.

בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 7x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \sqrt{14 - 2x}$$



גרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את ציר ה- $x$  בראשית הצירים ובנקודה  $B$ ,  
ואת גרף הפונקציה  $g(x)$  הוא חותך בנקודות  $B$  ו- $D$ , כמתואר בציור.



א. (1) מצא את תחומי ההגדרה של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .

(2) מצא את שיעורי ה- $x$  של הנקודות  $B$  ו- $D$ .

$a$  הוא פרמטר המקיים  $1 \leq a \leq 2$ .

השטח המוגבל על ידי הגרפים של

הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ ,

על ידי האנכים  $x = a$  ו- $x = a + 1$

ועל ידי ציר ה- $x$ , מסתובב סביב ציר ה- $x$ .

ב. (1) חשב את  $a$  שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המקסימלי.

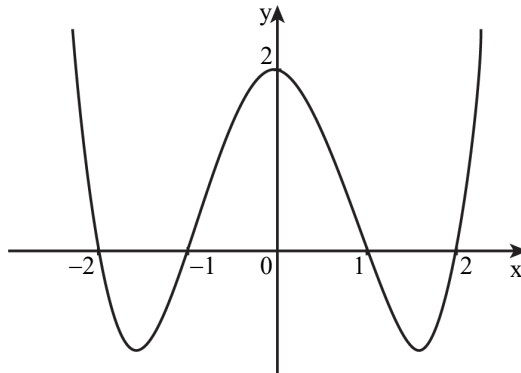
(2) מצא את  $a$  שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המינימלי.

אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

תשובות למבחן דוגמה מספר 5:

(2) לא ייתכן.

1. א. (1)



ב. (1) הוכחה. (2) 9. ג.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ .

ד. (1)  $\int_4^6 f(x-3) dx = S$ . (2) לא ניתן לחשב. (3) לא ניתן לחשב.

$$\int_2^4 f(x-1) dx = S \quad (4)$$

2. א.  $a_5 = 1$  או  $a_5 = -1$ . ב. (1)  $a_1 = \frac{1}{q^4}$ . (2) כן, 9. (3) אין כזה.

ג. (1)  $1, q, q^2, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q^3}, \frac{1}{q^4}$ . (2)  $k=9$ , להסביר יחודיות.

3. א. (1)  $\frac{1}{9}$ . (2)  $\frac{8}{27}$ . ב.  $\frac{137}{729}$ . ג.  $\frac{137}{211}$ .

4. א. (1) הוכחה. (2)  $KL = \frac{2r^2}{a}$ . ב. (1) הוכחה. (2)  $P_{ABCD} = \frac{8r^2}{a}$ . ג. לא.

5. א. (1)  $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ . ב. (1) הוכחה. (2)  $\angle ACF \approx 14.48^\circ$ . ג.  $S_{\Delta ACF} \approx 0.2676a^2$ .

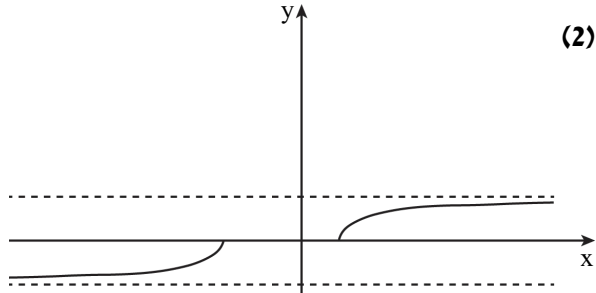
6. א. (1)  $x \leq -2$ ,  $x \geq 1$  (2) להסביר. (3)  $(x \rightarrow -\infty)y = -\frac{1}{2}$ ,  $(x \rightarrow +\infty)y = \frac{1}{2}$

(4)  $(-2, 0)$ ,  $(1, 0)$ . (5) שליליות עבור  $x < -2$ . חיוביות עבור  $x > 1$ .

ב. (1)  $x = \frac{8-a}{2a+2}$ . (2)  $a = -1$ .

ג. (1) עלייה:  $x > 1$  או  $x < -2$ , ירידה: אין.

ד.  $6\sqrt{2} - 2\sqrt{10} \approx 2.161$ .

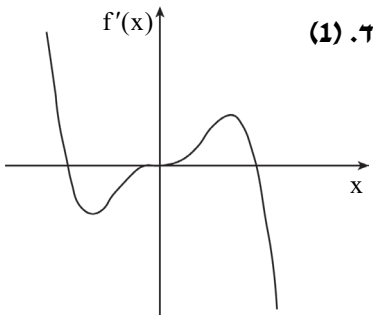


7. א. (1)  $f(x)$  זוגית. (2)  $(-\pi, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$ . (3) להסביר. (4)  $f'(x)$  אי זוגית.

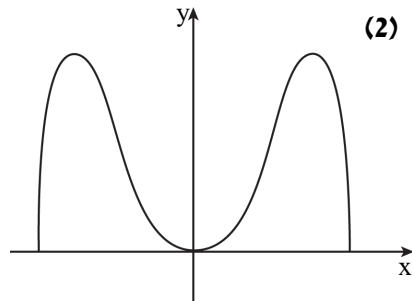
ב. (1) להראות. (2) שלוש נקודות.

ג. (1)  $x = \pi$  מינימום קצה,  $x = 2.46$  מקסימום,

$x = 0$  מינימום,  $x = -2.46$  מקסימום,  $x = -\pi$  מינימום קצה.



ד. (1)



(2)

(2) 2 נקודות פיתול לפחות.

8. א. (1)  $f(x)$ :  $0 \leq x \leq 7$ ,  $g(x)$ :  $x \leq 7$ . (2)  $x_D = 2$ ,  $x_B = 7$ .

ב. (1)  $a \approx 1.63$ . (2)  $a = 1$ .



## מבחן דוגמה מספר 6

### פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. לפניך טענה:



אם ל- $n$  טבעי מסוים  $n^3 - n$  מתחלק ב-3 ללא שארית,

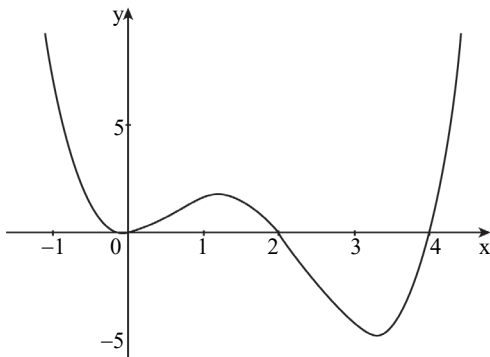
אז גם  $(n+1)^3 - (n+1)$  מתחלק ב-3 ללא שארית.

דן אומר:

הטענה שלמעלה מספיקה כדי להוכיח שהביטוי  $n^3 - n$  מתחלק ב-3 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.

האם דן צודק? נמק את תשובתך.

ב. לפניך גרף הפונקציה  $f(x)$ . הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $-1.1 \leq x \leq 4.4$ .



נגדיר:  $F(a) = \int_{-1}^a f(x) dx$ ,  $a > -1$ .

(1) האם  $F(0)$  חיובי או שלילי?

נמק.

(2) תן דוגמה לערך של  $a$  שבו

$F(a)$  יורדת.

(3) באיזה ערך של  $a$

יש לפונקציה  $F(a)$

מקסימום? נמק.

- ג. נתונה פונקציה זוגית שגזירה בכל נקודה.  
 לפניך טענה: "פונקציית הנגזרת של הפונקציה הנתונה היא אי-זוגית".  
 קבע אם הטענה נכונה או לא נכונה.  
 אם הטענה נכונה- הוכח אותה, אם לא- הצג דוגמה נגדית.



- ד. נתונה סדרה חשבונית ובה  $2n+1$  איברים. הפרש הסדרה הוא  $d$ .  
 (1) הוכח כי האיבר הראשון, האיבר האמצעי והאיבר האחרון של הסדרה הנתונה מהווים סדרה חשבונית.  
 (2) הבע את הפרש הסדרה של שלושת האיברים מסעיף א באמצעות  $n$  ו- $d$ .



## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. נתונה סדרה  $a_n$  המקיימת לכל  $n$  את הכלל:  $a_{n+1} + a_n = 6n + 5$ .  
 א. הוכח כי מתקיים  $a_{n+2} = a_n + c$  (c הוא מספר קבוע), ומצא את c.  
 ב. כתוב דוגמה לסדרה  $a_n$  המקיימת את הכלל, והיא אינה סדרה חשבונית (כתוב לפחות 4 איברים ראשוניים בסדרה).



נתון כי הסדרה  $a_n$  כולה היא חשבונית.

ג. חשב את  $a_1$ .

בנו סדרה חדשה בת  $2n+1$  איברים:

$$a_1 - 1, a_2 - 2, a_3 - 3, \dots, a_{2n+1} - (2n+1)$$

האיבר האמצעי בסדרה החדשה הוא 43.

ד. חשב את סכום הסדרה החדשה.



3. בקופסה יש 12 כדורים כחולים, 20 כדורים אדומים

ו- 8 כדורים צהובים.



על 28 מן הכדורים רשומה הספרה 1, ועל השאר רשומה הספרה 0.

$\frac{1}{4}$  מן הכדורים שרשומה עליהם הספרה 1 הם צהובים.

מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה 1 גדול פי 4

ממספר הכדורים הכחולים שרשומה עליהם הספרה 0.

דני מוציא באקראי כדור מן הקופסה.

א. מהי ההסתברות שהכדור שהוציא דני הוא כדור כחול ושרשומה עליו

הספרה 1?

ב. אם ידוע שדני הוציא באקראי כדור כחול אך כדור שרשומה עליו

הספרה 1, מהי ההסתברות שהוא הוציא כדור שרשומה עליו

הספרה 0?

דני החזיר את הכדור לקופסה, וכעת הוא משחק במשחק:

הוא מוציא באקראי כדור מן הקופסה, רושם לעצמו את הספרה שעליו

ומחזיר את הכדור לקופסה.

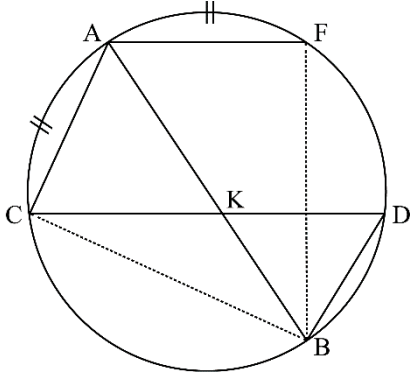
בכל פעם שהוא מוציא כדור שרשומה עליו הספרה 1 הוא צובר נקודה.

הוא יפסיק לשחק כאשר יצבור 5 נקודות.

ג. מהי ההסתברות שדני יצבור 5 נקודות אחרי 6 פעמים בדיוק?

## פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. AB הוא קוטר במעגל. CD ו-AF הם שני מיתרים במעגל המקבילים.



זה לזה. AB ו-CD נחתכים בנקודה K (ראה ציור).

נתון כי  $\widehat{CA} = \widehat{AF}$  (הקשתות המסומנות בציור).

א. (1) הוכח כי  $\angle FAB = \angle CAB$ .

(2) הוכח כי  $BK = BD$ .

ב. הוכח כי המרובע AFKC הוא מעוין.

ג. נתון גם כי  $BD \cdot AB = CD \cdot AC$ .

(1) הוכח כי  $\triangle BDC \sim \triangle CAB$ .

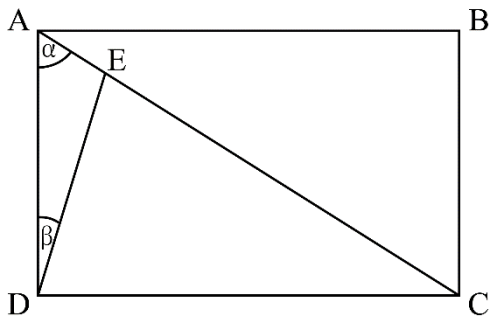
(2) הוכח כי CD הוא קוטר במעגל.

5. נתון מלבן ABCD. הנקודה E נמצאת על האלכסון AC (ראה ציור).

נתון כי  $\angle DAC = \alpha$ ,  
 $\angle ADE = \beta$ .

$R_1$  הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן ABCD.

$R_2$  הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.



א. הבע את היחס  $\frac{R_1}{R_2}$ .

באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$ .

ב. הראה כי כאשר  $\alpha = \beta$

מתקיים  $\frac{R_1}{R_2} < 2$ .


ג. נתון כי  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 15^\circ$ .


(1) הראה כי  $\triangle DEC$  הוא משולש שווה שוקיים.

(2) הבע את  $BE^2$  באמצעות  $R_1$ .

**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = a \cdot \cos 2x + \sin^2 x$  המוגדרת בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

a הוא פרמטר. 

א. האם הפונקציה  $f(x)$  היא זוגית א או אי-זוגית 

א או לא אחת מהן? נמק.

ב. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$

(הבע באמצעות a אם צריך), אם נתון כי הפונקציה אינה קבועה?

קבע את סוגן בהתאם לערך של a

(התייחס לשתי האפשרויות עבור a).

ג. מצא את הערך של a שעבורו הפונקציה  $f(x)$  היא קבועה. נמק.

נתון  $a > 1$ .


ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

ה. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  ועל ידי

ציר ה-x שווה ל-12. מצא את a.

7. נתון מעגל ובו קוטר AB. רדיוס המעגל הוא 10.

הנקודה P נמצאת על הקוטר AB בין מרכז המעגל ובין הנקודה B. 

דרך הנקודה P מעבירים אנך ל-AB החותך את המעגל בנקודות C ו-D.

מצא את השטח המקסימלי של המשולש ACD.

8. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$ . ו-  $c$  הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .



נתון כי הפונקציה  $f(x)$  היא זוגית.

ב. מצא את  $b$ .

נתון: לגרף הפונקציה  $f(x)$  יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$  בין שתי

האסימפטוטות האנכיות שלה.

ג. מצא את תחום הערכים של  $c$ .

ד. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגה

(הבע באמצעות  $c$  אם צריך).

(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $f(x)$ ,

וסרטט קיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ה. נתונה הפונקציה  $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$  המוגדרת באותו תחום שבו

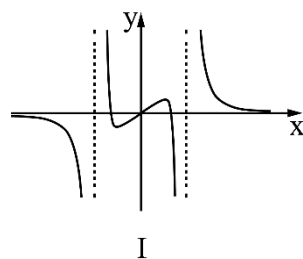
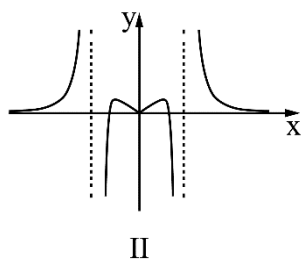
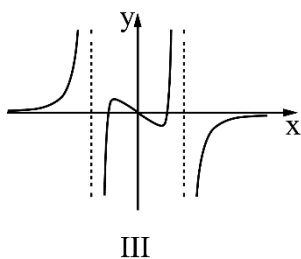
מוגדרות הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$ .

לפניך גרפים III-I.

(1) איזה מן הגרפים, III-I, הוא גרף הפונקציה  $g(x)$ ? נמק.

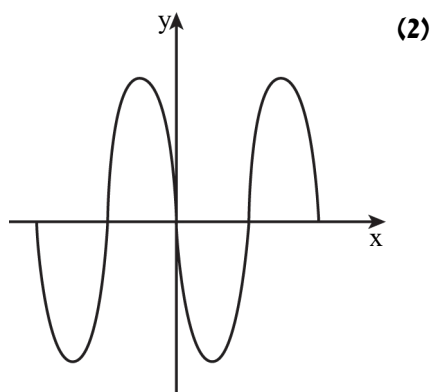
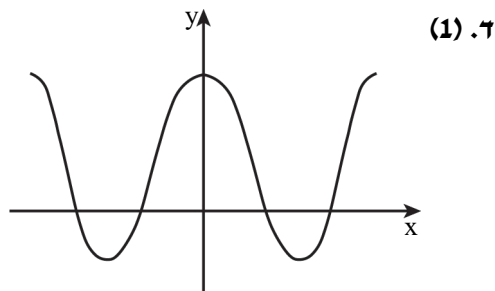
(2) הבע באמצעות  $c$  את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$

ועל ידי ציר ה- $x$ .



## תשובות למבחן דוגמה מספר 6:

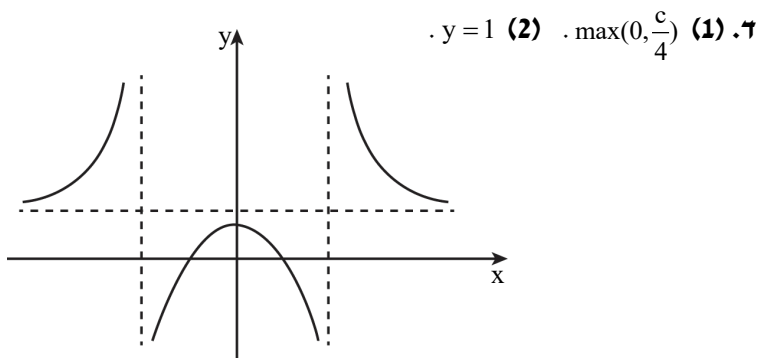
1. א. דן אינו צודק. נימוק.  
 ב. (1)  $F(0)$  חיובי. (2) כל  $a$  בתחום  $2 < a < 4$ . לדוגמה:  $a = 3$ . (3)  $a = 2$ .  
 ג. הטענה נכונה. ד. (1) הוכחה. (2) nd.
2. א. הוכחה,  $c = 6$ . ב. דוגמה:  $0, 11, 6, 17, \dots$ . ג.  $a_1 = 4$ . ד.  $1, 763$ .
3. א.  $\frac{9}{40}$ . ב.  $\frac{3}{31}$ . ג.  $0.252105$ .
4. א. (1) הוכחה. (2) הוכחה. ב. הוכחה. ג. (1) הוכחה. (2) הוכחה.
5. א.  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha}$ . ב. להראות. ג. (1) להראות. (2)  $BE^2 = R_1^2(4 - \sqrt{3})$ .
6. א.  $f(x)$  זוגית.  
 ב. עבור  $a < \frac{1}{2}$ :  $(\pi, a)$  מינימום,  $(\frac{\pi}{2}, 1-a)$  מקסימום,  $(0, a)$  מינימום.  
 $(-\pi, a)$  מינימום,  $(-\frac{\pi}{2}, 1-a)$  מקסימום.  
 עבור  $a > \frac{1}{2}$ :  $(\pi, a)$  מקסימום,  $(\frac{\pi}{2}, 1-a)$  מינימום,  $(0, a)$  מקסימום,  
 $(-\pi, a)$  מינימום,  $(-\frac{\pi}{2}, 1-a)$  מקסימום.  
 ג.  $a = \frac{1}{2}$ .



**ה.**  $a = 2$

**7.** השטח המקסימלי הוא  $75\sqrt{3}$ .

**8.** **א.**  $x \neq -2, x \neq 2$  **ב.**  $b = 0$  **ג.**  $0 < c < 4$



**ה.** **(1)** III **(2)**  $\frac{C^2}{16}$



## מבחן בגרות מספר 7

קיץ תש"ף, מועד א, 2020

### פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת שהביטוי  $5^n - 1$  מתחלק ל-4 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.



ב. קבע אם הטענה הבאה נכונה: שני משולשים שדומים זה לזה והשטחים שלהם שווים – חופפים זה לזה. נמק.



ג. קבע אם הטענה הבאה נכונה: לפונקציה  $f(x) = \frac{x \cdot (x-3)}{(x-3)^2}$  אין אסימפטוטה אנכית, אך יש אסימפטוטה אופקית אחת. נמק.



ד. קבע אם הטענה הבאה נכונה: אם נזיז את גרף הפונקציה  $\sin x$  שמאלה ב- $\frac{\pi}{2}$  נקבל את גרף הפונקציה  $\cos x$ . נמק.



## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. בשנת הלימודים הראשונה במכללה גדולה בעיר נדרשים הסטודנטים לבחור

קורס חובה אחד מתוך שלושה קורסי חובה אפשריים: קורס א', קורס ב', או קורס ג'.



התברר כי מחצית מהסטודנטים בחרו בקורס א', רבע מהסטודנטים בחרו בקורס ב', והשאר בחרו בקורס ג'. מחצית מהסטודנטים בשנה הראשונה גרים בעיר.

נתון כי אין תלות בין המגורים בעיר לבין הבחירה בקורס א'.

א. מהי ההסתברות שסטודנט בחר בקורס א' וגר בעיר?

נתון שבקורס ב' יש תלות בין המגורים בעיר לבין הבחירה בקורס.

ב. האם ייתכן ש- $\frac{1}{8}$  מהסטודנטים הם כאלו שבחרו בקורס ב' וגרים בעיר? נמק.

נתון בנוסף, כי בקורס ב', מספר הסטודנטים שלא גרים בעיר הינו כפול ממספר הסטודנטים שגרים בעיר.

ג. (1) מבין הסטודנטים שבחרו בקורס ג', מהי ההסתברות לבחור

סטודנט שגר בעיר?

(2) לצורך השתתפות בפגישה עם ראש העיר, מוציאים בזה אחר זה,

באופן אקראי, סטודנטים מכיתת הלימוד של קורס ג',

עד שיוציאים 2 סטודנטים שגרים בעיר.

מהי ההסתברות שהוצאו 3 סטודנטים לצורך כך?

3. נתונה סדרה הנדסית בת  $2n$  איברים.

נתון כי סכום הסדרה גדול פי מסכום האיברים במקומות האי זוגיים.

א. חשב את מנת הסדרה.



נתון כי בסדרה יש 3 איברים עוקבים שמכפלתם שווה ל-1.

ב. (1) הראה כי קיים איבר בסדרה שערכו שווה ל-1.

(2) האם ייתכן כי האיבר הראשון בסדרה שווה ל-1? נמק.

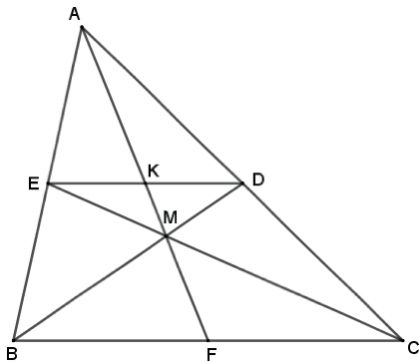
נתון כי האיבר הרביעי בסדרה שווה ל-4.

סכום 2 האיברים באחרונים בסדרה הוא 1,280.

ג. מצא את מספר האיברים בסדרה.



## פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. במשולש ABC נתון כי  $BD$ ,  $CE$  ו- $AF$

הם תיכונים לצלעות המשולש.

הנקודה  $M$  היא מפגש התיכונים במשולש.

הקטעים  $ED$  ו- $AM$  נפגשים בנקודה  $K$

(ראה ציור).

נסמן:  $MF = a$ .

א. הוכח כי  $EK$  הוא קטע אמצעים

במשולש  $ABF$ .

ב. הבע את  $AK$  ו- $KM$  באמצעות  $a$ .

ג. חשב את היחס בין

שטח המשולש  $AKD$  ובין שטח המשולש  $DKM$ .

ד. הוכח כי  $EK = KD$ .

דרך הנקודות  $A, E, M$  ו- $D$  עובר מעגל.

ה. (1) הוכח כי  $\triangle AKD \sim \triangle EKM$ .

(2) מהו יחס הדמיון בין המשולשים  $AKD$  ו- $EKM$ ?



5. שני מעגלים נחתכים בנקודות  $A$  ו- $B$ .

הנקודה  $O$  היא מרכז המעגל הגדול שרדיוסו  $R$ .

המעגל הקטן, שרדיוסו  $r$ , עובר דרך הנקודה  $O$ .

הנקודה  $D$  נמצאת על המעגל הקטן,

והנקודה  $C$  נמצאת על המעגל

הגדול (ראה ציור).

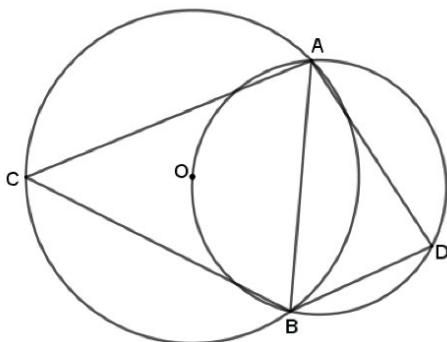
נתון:  $\angle ADB = 2\alpha$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $\angle ACB$ .

ב. הוכח שמתקיים:  $R = 2r \sin \alpha$ .

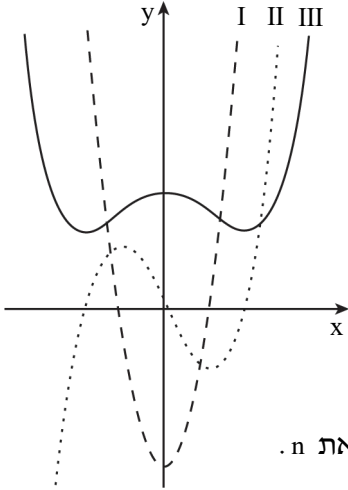
ג. נתון:  $\alpha = 40^\circ$ ,  $r = 10$  ס"מ,  $CA = CB$ ,  $AD = 1.5BD$ .

חשב את היקף המרובע  $ACBD$ .



**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. לפניך סרטוט המתאר את הגרפים של הפונקציות  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$  המוגדרות לכל  $x$ .  
גרף III חיובי לכל  $x$ .



א. התאם כל אחד מהגרפים I, II, III לפונקציות  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$ . נמק את קביעתך.

נתון כי  $f'(x) = 2x \cdot (x^2 - 1)^n$ ,

$n$  הוא פרמטר טבעי.

ב. האם פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  היא זוגית או אי זוגית?

ג. היעזר בגרף של  $f'(x)$ , וקבע אם  $n$  הוא מספר זוגי או אי זוגי. הסבר.

ד. נתון כי השטח שבין גרף II לבין ציר ה- $x$  שווה ל-1 (ברביע השני וברביע הרביעי). חשב את  $n$ .



7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

א. מצא, בתחום הנתון, את:

(1) שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(2) שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ג. בחר, מבין הגרפים הבאים, את הגרפים המתאימים לפונקציות:

$g(x) = \cos x \cdot \sqrt{\sin x} - 1$   $h(x) = \sqrt{\sin x \cdot \cos^2 x}$

נמק את בחירותיך.



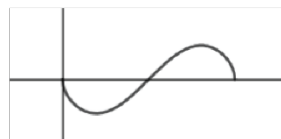
גרף ב



גרף א



גרף ד



גרף ג



8. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)(x-a)}}{x-2}$ .  $a > 2$  הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות  $a$  אם צריך.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ?



(2) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים?

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$

המאונכות לצירים.

נתון:  $f(a+2) = -f(2-a)$ .

ב. מצא את  $a$ .

הצב  $a = 5$  וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x+2)$ .

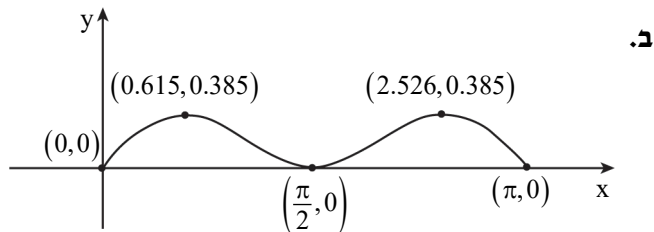
תשובות למבחן בגרות מספר 7 – קיץ תש"ף, מועד א, 2020:

1. א. הוכחה. ב. נכונה. ג. לא נכונה. ד. נכונה.
2. א. 0.25. ב. לא. ג.  $\frac{2}{3}$  (1). ד.  $\frac{8}{27}$  (2).
3. א. 4. ב. (1). הוכחה. (2) לא. ג. 8.
4. א. הוכחה. ב.  $KM = 0.5a$ ,  $AK = 1.5a$ . ג. 3.
- ד. הוכחה. ה. (1) הוכחה. (2)  $1:\sqrt{3}$ .
5. א.  $\angle ACB = 90^\circ - \alpha$ . ב. הוכחה. ג. 76.427 ס"מ.
6. א. גרף I -  $f''(x)$ , גרף II -  $f'(x)$ , גרף III -  $f(x)$ . ב. אי זוגית. ג. אי זוגי.
- ד.  $n = 1$ .

7. א. (1)  $(\pi, 0)$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $(0, 0)$ .

(2)  $(\pi, 0)$  מינימום,  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  מינימום,  $(0, 0)$  מינימום,

מקסימום  $(2.526, 0.385)$ , מקסימום  $(0.615, 0.385)$ .

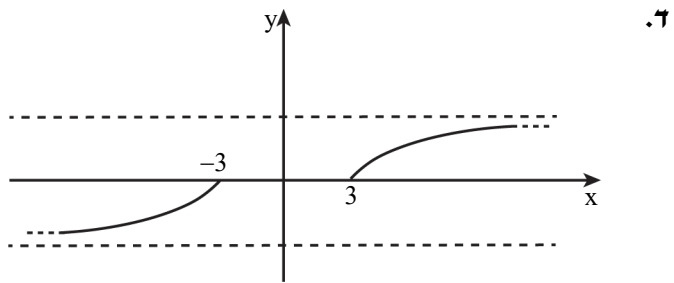
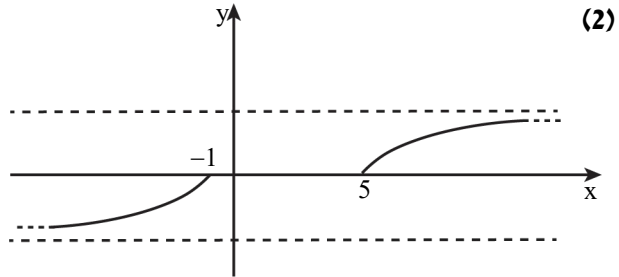


ג.  $h(x)$  - גרף ג',  $g(x)$  - גרף ב'.

8. א. (1)  $x \leq -1$ ,  $x \geq a$  (2)  $(a,0)$ ,  $(-1,0)$ .

ב.  $a = 5$  (3)  $y = -1$  ( $x \rightarrow -\infty$ ),  $y = 1$  ( $x \rightarrow \infty$ )

ג. (1) תחומי עלייה:  $x < -1$ ,  $x > 5$ ; תחומי ירידה: אין.





## מבחן בגרות מספר 8

קיץ תש"ף, מועד ב, 2020

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. לפניך טענה: אם פונקציה היא אי זוגית אז היא חייבת לעבור דרך הראשית. קבע אם הטענה נכונה תמיד. אם כן, נמק. אם לא, הבא דוגמה.



ב. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$



ג. נתון משולש ADE. נקודה B ונקודה C מונחות על הצלעות AD ו-AE בהתאמה. לפניך טענה: אם  $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$  אז  $BC \parallel DE$ .



קבע אם הטענה נכונה תמיד. אם כן, נמק. אם לא, הבא דוגמה.

4. גרף הפונקציה  $f(x)$  רציף וחותר את ציר ה- $x$  ב-3 נקודות, כמתואר בציור.



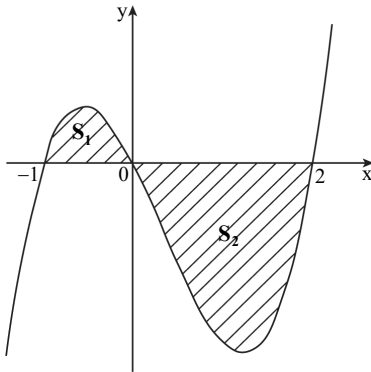
נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$  וציר ה- $x$  שווה ל- $S$ .

$S_1$  הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$  וציר ה- $x$  ברביע השני.

$S_2$  הוא השטח המוגבל על ידי

גרף הפונקציה  $f(x)$  וציר ה- $x$

ברביע הרביעי.



נתון גם:  $\int_{-1}^2 f(x)dx = K$

הבע באמצעות  $S$  ו- $K$

את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .

## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. בקורס באוניברסיטה עורכים שני מבחני סמסטר.

לאחר סיומם סוכמו התוצאות, ונמצא כי:



• 80% מהסטודנטים הצליחו במבחן הראשון.

• ידוע כי אם בוחרים באקראי סטודנט, אז ההסתברות שהוא הצליח רק במבחן הראשון קטנה פי 3 מההסתברות שהוא הצליח בשני המבחנים.

• 20% מהסטודנטים נכשלו בשני המבחנים.

א. בוחרים באקראי סטודנט שידוע שהוא הצליח במבחן הראשון.

מהי ההסתברות שהוא עבר בהצלחה את המבחן השני?

ב. בוחרים באקראי סטודנט. האם יתכן שהסטודנט נכשל במבחן הראשון והצליח במבחן השני? נמק.

ג. בוחרים באקראי סטודנט שהצליח לכל היותר באחד המבחנים.

מהי ההסתברות שהוא הצליח לפחות באחד המבחנים?

ד. נתון כי בקורס לומדים 50 סטודנטים. בוחרים שלושה סטודנטים מתוכם

באקראי בלי החזרה. מהי ההסתברות שכל השלושה עברו את שני המבחנים?

3. נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שכל איבריה חיוביים.

האיבר הראשון של הסדרה הוא  $a_1$  ומנת הסדרה היא  $q^2$ ,  $q > 0$ .



בין כל שני איברים סמוכים של הסדרה הנתונה מכניסים איבר נוסף, כך שהסדרה החדשה המתקבלת היא סדרה הנדסית.

א. הבע את מנת הסדרה החדשה באמצעות  $q$  במקרים הבאים:

(1) כל האיברים שמכניסים לסדרה הם חיוביים.

(2) כל האיברים שמכניסים לסדרה הם שליליים.

נתון כי כל האיברים שהכניסו לסדרה הם שליליים.

סכום הסדרה החדשה קטן פי  $m$  מסכום הסדרה הנתונה ( $m$  הוא פרמטר)

ב. הבע את  $m$  באמצעות  $q$ .

נתון כי הסכום של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה

החדשה הוא  $-6q$ .

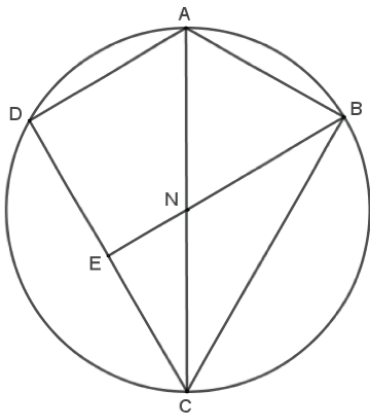
ג. חשב את הסכום של הסדרה הנתונה.

ד. הבע באמצעות  $q$  את סכום האיברים בסדרה החדשה.

### פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. המרובע ABCD הוא דלתון החסום במעגל ( $BC = DC$ ,  $AB = AD$ ).

E היא נקודה על DC כך ש- BE מאונך ל- DC.



א. הוכח:  $\angle ADC = 90^\circ$ .

ב. הוכח:  $AB = NB$ .

נתון כי שטח המשולש NCE שווה

לרבע משטח המשולש ACD.

ג. הוכח: הנקודה N היא מרכז המעגל.

ד. מצא את גודל הזווית BCD. נמק.

נסמן את שטח הדלתון ABCD ב- S.

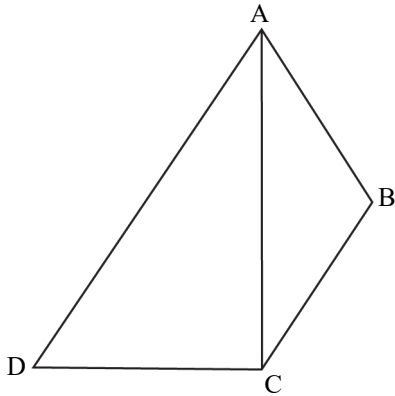
ה. הבע את שטח המרובע ANED

באמצעות S. נמק.



5. נתון משולש ישר זווית  $ACD$  ( $\angle ACD = 90^\circ$ ).

העבירו קטע  $CB$  כך שהתקבל טרפז  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) (ראה ציור).



נתון:  $AD = 2k$ ,  $BC = k$ ,  $\angle ADC = \alpha$ .

א. הבע את שוקי הטרפז  $ABCD$

באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  (אם צריך).

הנקודה  $E$  נמצאת על הצלע  $AD$

כך שמתקיים:  $CE \parallel BA$ .

שטח המרובע  $ABCE$  הוא  $\frac{\sqrt{3}}{2}k^2$ .

ב. מצא את  $\alpha$ .

ג. הבע באמצעות  $k$  את אורך הקטע  $BE$ ,

עבור הזווית  $\alpha$  הקטנה מבין השתיים שמצאת.

### פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

### של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - a}{x^3}$ ,  $a \neq 0$  הוא פרמטר.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ?

ב. רשום את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה  $f(x)$ .

ג. הבע באמצעות  $a$  את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$

עם ציר ה- $x$ . רשום לאילו ערכי  $a$  יש נקודות חיתוך.

ד. הבע באמצעות  $a$  את שיעורי נקודות הקיצון של גרף הפונקציה  $f(x)$ , וקבע

את סוגן. רשום לאילו ערכי  $a$  יש נקודות קיצון.

ענה על סעיפים ה-ו עבור  $a > 0$ .

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

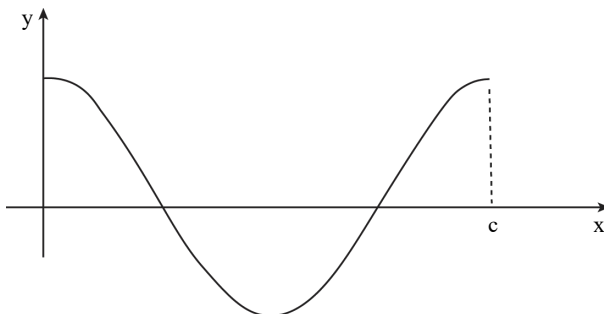
נתונה הפונקציה  $g(x) = (f(x+1))^{2020}$ .

ו. היעזר בסעיפים הקודמים, וקבע את מספר נקודות הקיצון של

הפונקציה  $g(x)$ . נמק.

7. בציור מתואר חלק מגרף הפונקציה  $f(x) = \cos 2x$ .

נתון:  $f(c) = f(0)$  (c מסומן בציור).



- א. חשב את c.
- ב. מצא את שיעורי ה-x של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה-x, בתחום שבין 0 ל-c.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
- ד. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x) = \sqrt{\cos 2x}$  עבור  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
- ה. הוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף ג את הסקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ . רשום ליד כל גרף את הפונקציה המתאימה.
- ישר המקביל לציר ה-y חותך את הגרפים של הפונקציות  $g(x)$  ו- $f(x)$  בתחום  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  בנקודות A ו-B בהתאמה. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה A שווה לשיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה B.
- ו. מצא את שיעור ה-x של הנקודות A ו-B.

8. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2}$ .  $a \neq 0$  הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות  $a$ ,  
והבחן בין  $a > 0$  ובין  $a < 0$ .



- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).
- (3) הראה שהפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.
- (4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
- (5) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בעבור  $a > 0$  וסקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בעבור  $a < 0$ .  
בעבור כל גרף שסרטטת כתוב את התחום המתאים של הפרמטר  $a$ .
- ג. מצא בעבור אילו ערכים של הפרמטר  $a$  גרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את הישר  $y = 1$  או משיק לו.

תשובות למבחן בגרות מספר 8 – קיץ תש"ף, מועד ב, 2020:

1. א. אינה נכונה תמיד. ב. הוכחה. ג. אינה נכונה תמיד.

$$S_2 = \frac{S-K}{2}, S_1 = \frac{S+K}{2} \quad \text{ד.}$$

2. א. 0.75. ב. לא ייתכן. ג. 0.5. ד.  $\frac{29}{140}$ .

3. א. (1) q. ב. (2) -q. ג.  $m = \frac{1}{1-q}$ . ד.  $6(1-q)$ .

4. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד.  $\sphericalangle BCD = 60^\circ$ . ה.  $S_{ANED} = \frac{3}{8}S$ .

5. א.  $AB = k, DC = 2k \cos \alpha$ . ב.  $\alpha = 30^\circ$  או  $\alpha = 60^\circ$ . ג.  $BE = k\sqrt{3}$ .

6. א.  $x \neq 0$ . ב.  $x = 0, y = 0$ .

ג. עבור  $a > 0$ :  $(\sqrt{a}, 0)$ ,  $(-\sqrt{a}, 0)$ , עבור  $a < 0$  אין נקודות חיתוך.

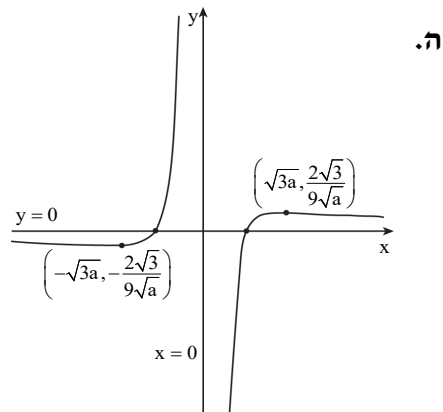
ד. עבור  $a > 0$ : מקסימום  $(\sqrt{3a}, \frac{2\sqrt{3}}{9\sqrt{a}})$ , מינימום  $(-\sqrt{3a}, -\frac{2\sqrt{3}}{9\sqrt{a}})$ ,

עבור  $a < 0$  אין נקודות קיצון.

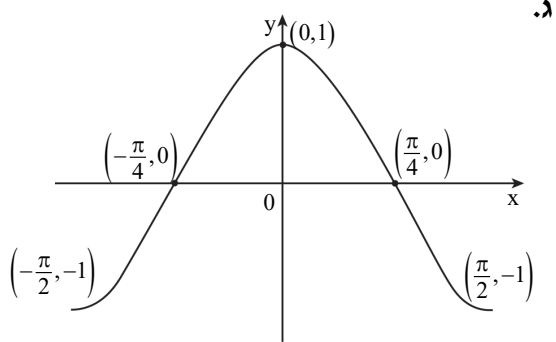
ו. 4 נקודות קיצון,

2 מינימום

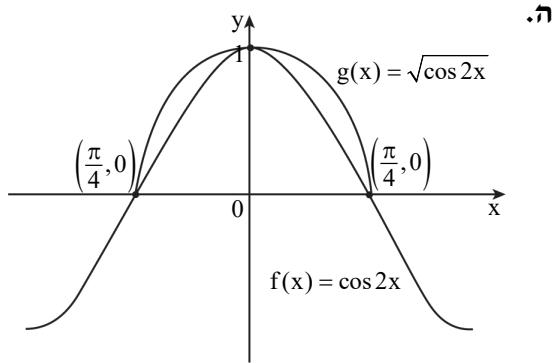
ו-2 מקסימום.



$\cdot \left(\frac{\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 0\right) \cdot \text{א} \cdot c = \pi \cdot \text{א} \cdot 7$



$\cdot -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \cdot \text{א}$



$\cdot x_A = x_B = 0.659 \cdot \text{א}$

8. א. (1)  $a > 0$  :  $x \geq \sqrt{a}$  ,  $x \leq -\sqrt{a}$  ;  $a < 0$  :  $x \neq 0$  .

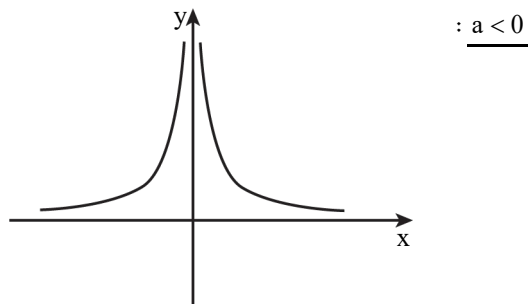
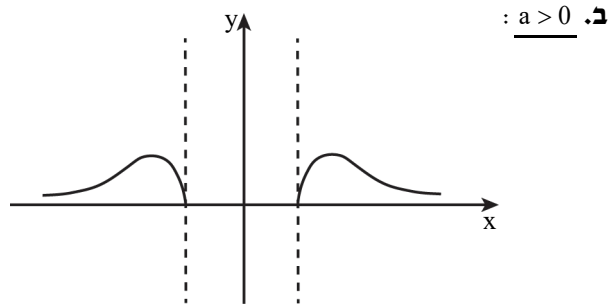
(2)  $a > 0$  :  $(\sqrt{a}, 0)$  ,  $(-\sqrt{a}, 0)$  ; אין . (3) הוכחה.

(4)  $a > 0$  :  $y = 0$  ;  $a < 0$  :  $x = 0$  ,  $y = 0$  .

(5)  $a > 0$  : תחומי עלייה :  $\sqrt{a} < x < \sqrt{2a}$  ,  $x < -\sqrt{2a}$  ,  $\sqrt{a} < x < \sqrt{2a}$  ;

תחומי ירידה :  $x > \sqrt{2a}$  ,  $x < -\sqrt{2a}$  ;

$a < 0$  : תחומי עלייה :  $x < 0$  , תחומי ירידה :  $x > 0$  .



ג.  $0 < a \leq \frac{1}{4}$  ,  $a < 0$  .



## מבחן בגרות מספר 9

חורף תשפ"א, 2021

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. הוכח כי כל טרפז שחסום במעגל הוא שווה שוקיים.



ב. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת שהביטוי  $n^3 - n$  מתחלק ב-6 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.



ג. נתון כי הפונקציה  $f(x)$  אינה קבועה, מוגדרת לכל  $x$  והיא אי זוגית. קבע לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי זוגית אן שלא ניתן לקבוע. נמק.



I.  $h(x) = -f(x)$

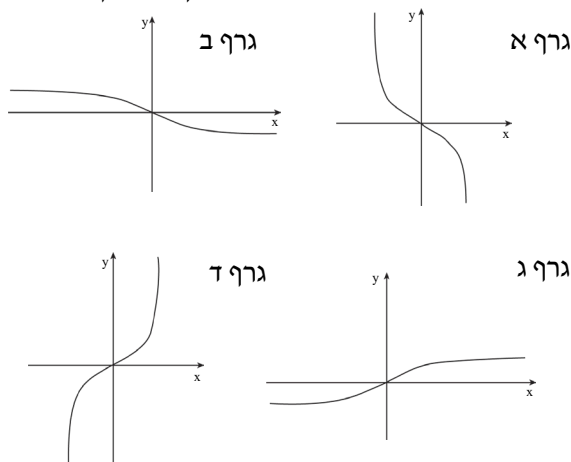
II.  $k(x) = (f(x))^2$

III.  $g(x) = f(x) + 4$

ד. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$ ,  $\alpha > 0$ .



אילו מהסרטוטים הבאים הוא גרף הפונקציה? נמק בקצרה.



## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. ערכו סקר בין תלמידי בית הספר ומצאו: 80% מהבנים עוסקים בספורט.

מספר הבנות בבית הספר גדול פי 1.2 ממספר הבנים שעוסקים בספורט.



א. מהי ההסתברות לבחור בן מבין תלמידי בית הספר?

ב. מהי ההסתברות לבחור תלמיד שעוסק בספורט (בן או בת),

אם ידוע שהמאורעות: "נבחר בן" ו-"נבחר תלמיד שעוסק בספורט" הם בלתי תלויים? הסבר.

ג. נבחר באקראי תלמיד (בן או בת). ידוע שהוא עוסק בספורט.

מה סביר יותר, שהוא בן או בת? הסבר.



3. נתונה סדרה הנדסית בת  $2n$  איברים  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ . מנת הסדרה היא  $q$ .

א. הבע באמצעות  $q$  את היחס בין סכום הסדרה לסכום האיברים במקומות הזוגיים.

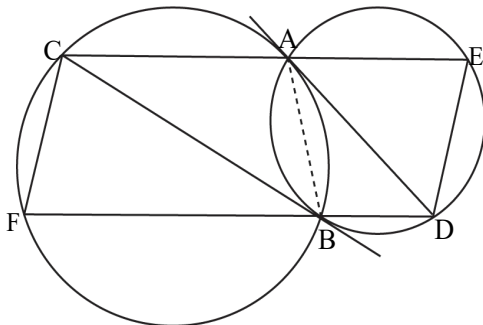


נתון כי היחס בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא 5.  
 ב. מצא את  $q$ . נמק.

נסמן:  $T = a_2 - a_1 + a_4 - a_3 + a_6 - a_5 + \dots + a_{2n} - a_{2n-1}$   
 ג. הבע את  $T$  באמצעות  $n$  בלבד.

### פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B.



המיתר AD במעגל הימני משיק למעגל השמאלי בנקודה A.



המיתר CB במעגל השמאלי

משיק למעגל הימני בנקודה B.

המשך המיתר AC במעגל השמאלי

חותך את המעגל הימני בנקודה E.

המשך המיתר BD במעגל הימני

חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.

א. הוכח:

(1)  $\triangle ABC \sim \triangle BDA$

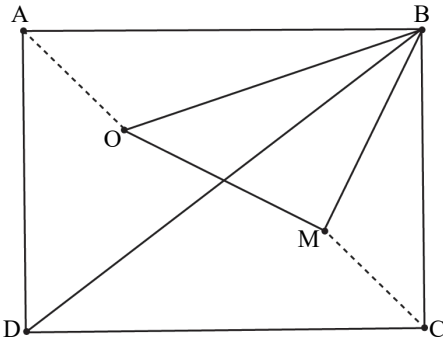
(2)  $\angle CED + \angle FCE = 180^\circ$

(3) המרובע CEDF הוא מקבילית.

ב. נתון:  $AC = 9$ ,  $BD = 4$ .

מצא פי כמה גדול שטח משולש ABC משטח משולש BDA. נמק.

5. במלבן ABCD הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABD והנקודה M



היא מרכז המעגל החסום במשולש BDC. נסמן:  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $\angle ABD = \alpha$ .

- א. הבע את AO ואת BO באמצעות  $a$  ו- $\alpha$ .
- ב. הראה כי  $\angle OBM = 45^\circ$ .
- נתון:  $AB = 8$ ,  $BC = 6$ .
- ג. חשב את  $\alpha$ .
- ד. חשב את שטח המשולש OMB.

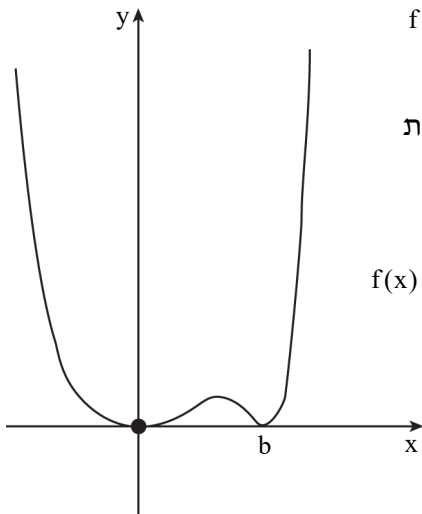


### פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

### של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. לפניך גרף הפונקציה  $f'(x)$  (נתון כי  $f'(0) = 0$  וכן  $f'(b) = 0$ ):

א. סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $f''(x)$ . הסבר את שיקוליך.



ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$



כאשר נתון  $f(b) = 0$ .

- סמן בגרף את נקודות הפיתול ונקודות הקיצון (אם יש כאלה).
- הסבר את שיקוליך.

נתון כי אחת מהפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$

היא  $g(x) = (x^3 - a)^2 \cdot x^2$ , הוא פרמטר.

ג. (1) התאם את הפונקציה  $g(x)$

לאחת מן הפונקציות הנ"ל

ונמק את בחירתך.

(2) היעזר בנתונים בשאלה, ובטא את  $a$  באמצעות  $b$ .

נתון כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $g(x)$  ובין ציר ה- $x$  הוא  $\frac{1}{9}$ .

ד. חשב את  $a$ .

7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$

ענה על הסעיפים הבאים עבור התחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .



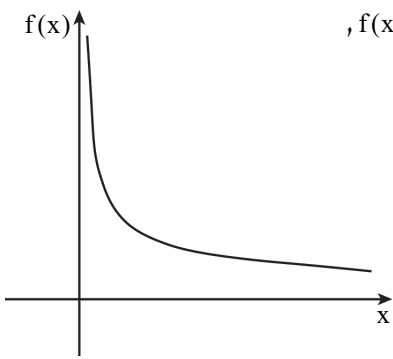
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  (אם יש כאלה).
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).
- ד. מצא את האסימפטוטות של  $f(x)$  המאונכות לציר ה- $x$ .
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- לפניך שלושה ביטויים:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx \quad (1)$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \quad (2)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx \quad (3)$$

- ו. סדר אותם מהקטן לגדול. פרט את שיקוליך.
- ז. חשב את ערכו של הביטוי הגדול מבין השלושה.



8. בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ ,

שתחום הגדרתה הוא  $x > 0$ .

מבין כל הנקודות שעל גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

הנקודה A היא הקרובה ביותר

לראשית הצירים, O.

א. (1) מצא את שיעורי הנקודה A.

(2) האם הישר AO מאונך לישר המשיק

לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה A? נמק.

נתונה הפונקציה  $g(x) = -f(-x)$ , המוגדרת בתחום  $x < 0$ .

ענה על סעיף ב בעבור  $-4 \leq x \leq -1$ .

ב. (1) מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום הנתון,

מה הם שיעורי הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים?

(2) מצא את שיעורי הנקודה הרחוקה ביותר מראשית הצירים,

מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום הנתון.

תשובות למבחן בגרות מספר 9 – חורף תשפ"א, 2021:

1. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. I-אי זוגית, II- זוגית, III- לא זוגית ולא אי זוגית.  
ד. גרף ג'.

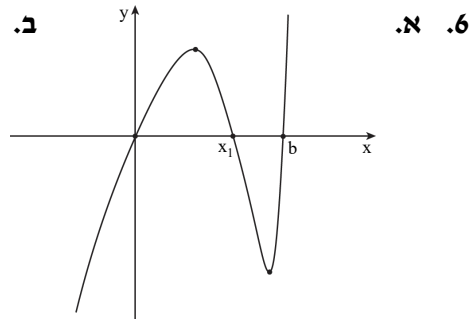
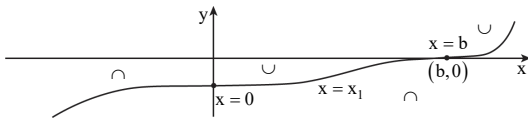
2. א.  $\frac{25}{49}$ . ב. 0.8. ג. בן.

3. א.  $\frac{q+1}{q}$ . ב. 5. ג.  $T = \frac{5^{2n}-1}{6}$ .

4. א. (1) הוכחה. (2) הוכחה. (3) הוכחה. ב.  $\frac{9}{4}$ .

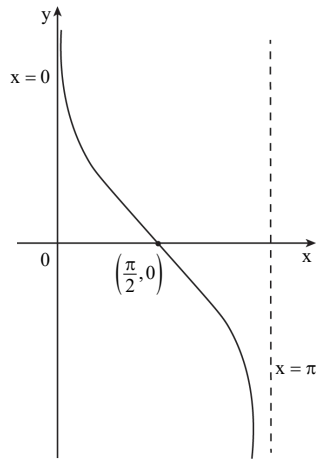
5. א.  $AO = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin(45^\circ + \frac{\alpha}{2})}$ ,  $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin(45^\circ + \frac{\alpha}{2})}$ . ב. להראות.

ג.  $\alpha = 36.87^\circ$ . ד. 10.



ג. (1)  $g(x) = f'(x)$ . (2)  $a = b^3$ . ד.  $a = 1$ .

7. א.  $0 < x < \pi$ . ב.  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ . ג. ירידה:  $0 < x < \pi$ , עלייה: אף x.



ד.  $x = 0, x = \pi$ . ה.

א.  $2 - \sqrt[4]{2^3} \approx 0.3182$ . ב.  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

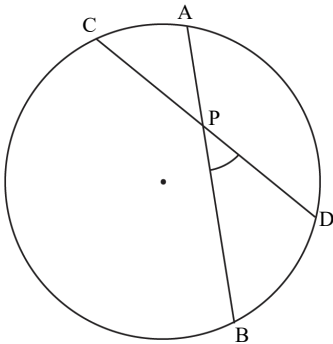
8. א. (1)  $A(2, 2\sqrt{2})$ . ב. (2) כן. ג. (1)  $(-2, -2\sqrt{2})$ . ד. (2)  $(-4, -2)$ .



# מבחן בגרות מספר 10

## קיץ תשפ"א, 2021, מועד א

### פרק ראשון – שאלות קצרות



1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. הראה כי במעגל, הזווית הנוצרת על ידי שני מיתרים שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

$$\angle BPD = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \text{ : כלומר יש להראות :}$$



ב. לפניך שתי טענות אשר רק אחת מהן נכונה לכל  $n$  טבעי.

קבע איזו מהטענות נכונה.

הוכח את הטענה הנכונה לכל  $n$  טבעי באינדוקציה (או בדרך אחרת).

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2n+4} \text{ . I}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{3(n+1)} \text{ . II}$$

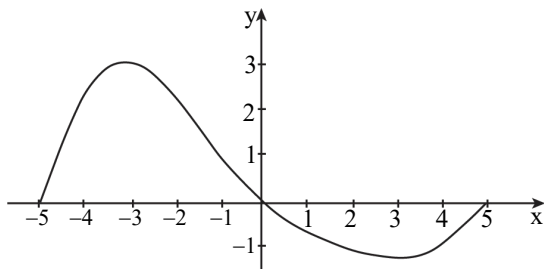


ג. קבע אם הטענות הבאות נכונות. נמק.

I. הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-3}$  זהה לפונקציה  $h(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)}$ .

II. הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x+1}$  זהה לפונקציה  $h(x) = \sqrt{x^2(x+1)}$ .





4. נתון גרף הפונקציה  $f(x)$



בתחום  $-5 \leq x \leq 5$

ונתונה הפונקציה

עבור  $a > -4$  :

$$h(a) = \int_{-4}^a f(x) dx$$

(1) קבע באיזה תחום הפונקציה  $h(a)$  עולה. נמק.

(2) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה

של הפונקציה  $h(a)$ . נמק.



## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. נתונה סדרה  $a_n$  שסכום  $n$  האיברים הראשונים שלה, לכל  $n$  טבעי,

הוא:  $S_n = k \cdot n^2 - p \cdot n$ ,  $k > 0$ ,  $p > 0$ . הם פרמטרים.



א. (1) הבע את האיבר הכללי של הסדרה באמצעות  $k$ ,  $p$  ו- $n$ , בעבור  $n \geq 2$ .

(2) הנוסחה שמצאת בתת-סעיף א(1) נכונה בעבור כל  $n$  טבעי. הסבר מדוע.

(3) הוכח כי הסדרה היא סדרה חשבונית והבע את  $d$ , ההפרש של הסדרה,

באמצעות  $k$ .

נתונות שתי סדרות הנדסיות  $b_n$  ו- $c_n$ .

מנת הסדרה  $b_n$  שווה ל- $d$  (הפרש הסדרה החשבונית  $a_n$ ).

הסדרה  $c_n$  היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה שווה ל- $\frac{2}{d}$ .

נתון:  $a_1 = b_1 = c_1$ ,  $k = 1.5$ ,  $p = 4.5$ .

ב. הסבר מדוע  $c_n$  היא סדרה מתכנסת.

נתון כי היחס בין סכום  $m$  האיברים הראשונים של הסדרה  $b_n$

ובין סכום כל אברי הסדרה האינסופית  $c_n$  הוא  $\frac{1}{3} \cdot 40$ .

ג. חשב את  $m$ .

ד. האם הסדרה  $c_n$  היא סדרה עולה, סדרה יורדת

או סדרה לא עולה ולא יורדת? נמק את תשובתך.

3. בבית ספר תיכון גדול מאוד, מספר התלמידים גדול פי 9 ממספר המורים. בבית

הספר נערך סקר שהשתתפו בו כל המורים והתלמידים בבית הספר, והם בלבד.

המשתתפים בסקר נשאלו אם הם נבדקו לגילוי קורונה.

נמצא כי 80% מן המורים בבית הספר נבדקו לגילוי קורונה.

כמו כן נמצא כי  $\frac{13}{15}$  מכלל המשתתפים בסקר (מורים ותלמידים),

שנבדקו לגילוי קורונה, היו תלמידים.

א. מהי ההסתברות שמבין כלל המשתתפים בסקר ייבחר באקראי תלמיד שלא נבדק לגילוי קורונה?

בחרו באקראי בזה אחר זה 5 משתתפים מבין כלל משתתפי הסקר.

ב. מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם נבדקו לגילוי קורונה?

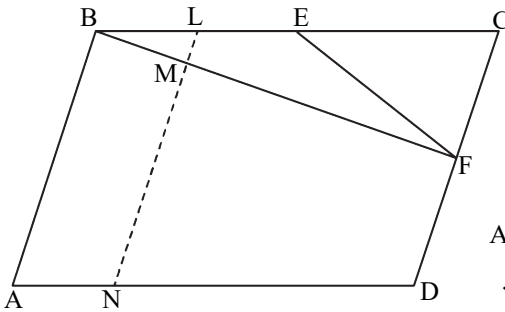
ג. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, לפחות משתתף אחד נבדק לגילוי קורונה.

מהי ההסתברות שלפחות 4 מן המשתתפים שנבחרו נבדקו לגילוי קורונה?

ד. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, בדיוק 2 נבדקו לגילוי קורונה.

מהי ההסתברות שהאחרון שנבחר נבדק לגילוי קורונה?

### פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. המרובע ABCD הוא מקבילית.

הזווית A היא זווית חדה.

הנקודה E היא אמצע הצלע BC

והנקודה F אמצע הצלע CD.

א. שטח המשולש ECF הוא S.

הבע את שטח המקבילית ABCD

באמצעות S. נמק את תשובתך.

ב. הנקודה L היא אמצע הקטע BE.

דרך הנקודה L העבירו ישר המקביל ל-AB וחותך את BF ואת AD

בנקודות M ו-N בהתאמה. חשב את היחס  $\frac{LM}{MN}$ .

ג. נתון:  $BE = EF$ .

האם אפשר לחסום את המרובע ABFD במעגל? נמק את קביעתך.

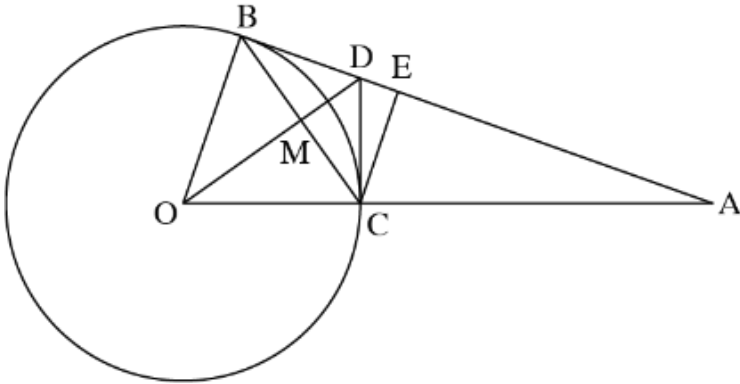
5. DB ו-DC משיקים למעגל שמרכזו O, כמתואר בסרטוט.

רדיוס המעגל: R. המשך BD חותך את המשך OC

בנקודה A. הקטע OD והמיתר BC נחתכים בנקודה M.

הקטע CE מאונך ל-AB.

נסמן:  $\angle ABC = \alpha$ .



א. הסבר מדוע אפשר לחסום במעגל:

(1) את המרובע OBDC.

(2) את המרובע MDEC.

נסמן:  $d_1$  הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע OBDC.

$d_2$  הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע MDEC.

$d_3$  הוא קוטר המעגל החוסם את המשולש AOD.

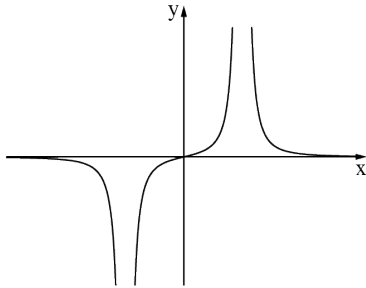
ב. הבע באמצעות  $\alpha$  ו-R את  $d_1$ , את  $d_2$  ואת  $d_3$ .

ג. מצא את הערך של  $\alpha$  שבעבורו מתקיים:  $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$ .

**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{x}{(x^2-2)^2}$ ,  $g(x) = \frac{x}{(x^2-2)^3}$ .

א. ענה על תתי-סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .



(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות

של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) הראה כי אין לפונקציה

נקודות קיצון.

(4) הוכח כי הפונקציה אי-זוגית.

ב. (1) הגרף שלפניך מתאר את אחת

הפונקציות  $f(x)$  או  $g(x)$ . קבע איזו מן

הפונקציות הגרף מתאר. נמק את קביעתך.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.

נתונה פונקציה  $h(x)$  שמקיימת  $h'(x) = f(x)$ .

$f(x)$  ו- $h(x)$  מוגדרות באותו תחום.

ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של  $h(x)$ ?

ד. חשב את:

(1)  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ . נמק את תשובתך.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , ציר ה- $x$  והישרים  $x = 1$ ,  $x = -1$ .

נתונה הפונקציה  $k(x) = f(x) + b$ .  $b \neq 0$  הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה  $k(x)$  זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק

את תשובתך.

7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 - 4a}}{x^3}$ .  $a > 0$  הוא פרמטר.

בסעיפים א-ה, בטא את תשובתיך באמצעות  $a$ , לפי הצורך.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ?

ב. הוכח שהפונקציה  $f(x)$  אי-זוגית.

ג. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים?

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה גם הפונקציה:  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ .

ה. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ ?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של

הפונקציה  $g(x)$ , אם יש כאלה?

ידוע כי בכל אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות  $f(x)$

ו- $g(x)$ , יש לגרף של  $f(x)$  ולגרף של  $g(x)$  משיק משותף.

ו. (1) הוסף לסרטוט שבמחברתך סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

פרט את שיקולך.

(2) מהו הערך של  $a$ ? נמק את תשובתך.

8. במשולש ABC אורך הצלע BC הוא  $a$ .

נתון:  $\sphericalangle BAC = \alpha$  (ברדיאנים).

נסמן:  $\sphericalangle ABC = x$  ( $0 < x < \pi - \alpha$ ).

א. הבע באמצעות  $x$ ,  $a$ , ו- $\alpha$  את היקף המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את ערך ה- $x$  שבעבורו היקף המשולש ABC

הוא מקסימלי.

ג. הסבר מדוע מתקיים המשפט הזה: מכל המשולשים בעלי צלע נתונה וזווית

מולה נתונה, המשולש בעל ההיקף המקסימלי הוא משולש שווה שוקיים.

**תשובות למבחן בגרות מספר 10 – קיץ תשפ"א, 2021, מועד א:**

1. א. הוכחה. ב. טענה I. הוכחה. ג. I - אינה נכונה, II - אינה נכונה.

ד. (1)  $-4 < x < 0$ . (2) תחומי קעירות כלפי מעלה (∪) :  $3 < x < 5$  או  $-4 < x < -3$ ,

תחום קעירות כלפי מטה (∩) :  $-3 < x < 3$ .

2. א. (1)  $a_n = 2kn - k - p$ . (2) הוכחה. (3)  $d = 2k$ . ב. הסבר  $\left(q = \frac{2}{3}\right)$ .

ג.  $m = 5$ . ד. עולה.

3. א. 0.38. ב. 0.33696. ג.  $\frac{351}{1031} = 0.340446$ . ד. 0.4.

4. א.  $S_{ABCD} = 8S$ . ב.  $\frac{LM}{MN} = \frac{1}{7}$ . ג. לא ניתן לחסום את המרובע ABFD במעגל.

5. א. (1) הוכחה. (2) הוכחה. ב.  $d_1 = \frac{R}{\cos \alpha}$ ,  $d_2 = R \tan \alpha$ ,  $d_3 = \frac{R}{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha}$ .

ג.  $\alpha = 30^\circ$ .

6. א. (1)  $f(x) : x \neq \pm\sqrt{2}$ ,  $g(x) : x \neq \pm\sqrt{2}$ .

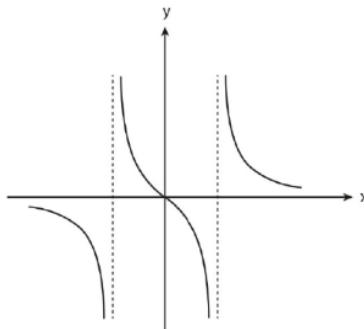
(2)  $f(x)$  ו-  $g(x) : x = -\sqrt{2}$ ,  $x = \sqrt{2}$ ,  $y = 0$ . (3) הוכחה. (4) הוכחה.

ג. תחומי עלייה :  $\sqrt{2} < x$  או

$$0 < x < \sqrt{2}$$

תחומי ירידה :  $-\sqrt{2} < x < 0$

או  $x < -\sqrt{2}$ .



ב. (1)  $f(x)$ . (2)

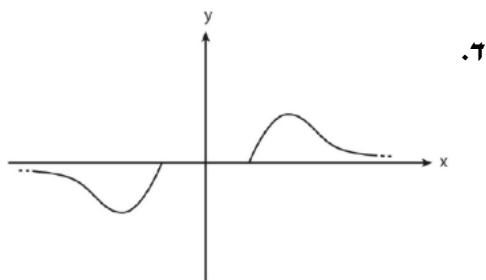
ד. (1) 0. (2)  $\frac{1}{2}$ . ה. הפונקציה לא זוגית ולא אי-זוגית.

7. א.  $\sqrt{\frac{4a}{3}} \leq x$  או  $x \leq -\sqrt{\frac{4a}{3}}$ . ב. הוכחה.

ג. (1)  $\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}}, 0\right), \left(\sqrt{\frac{4a}{3}}, 0\right)$

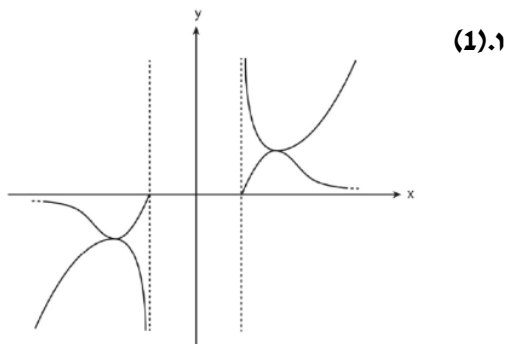
(2)  $\left(\sqrt{2a}, \frac{1}{2a}\right)$  מקסימום,  $\left(-\sqrt{2a}, -\frac{1}{2a}\right)$  מינימום,  $\left(\sqrt{\frac{4a}{3}}, 0\right)$  מינימום,

מקסימום  $\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}}, 0\right)$ .



ה. (1)  $\sqrt{\frac{4a}{3}} < x$  או  $x < -\sqrt{\frac{4a}{3}}$  (2)  $x = \sqrt{\frac{4a}{3}}, x = -\sqrt{\frac{4a}{3}}$

(2)  $a = \frac{1}{2}$



8. א.  $a + \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin x + \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin(x + \alpha)$ . ב.  $\frac{\pi - \alpha}{2}$ . ג. הוכחה.

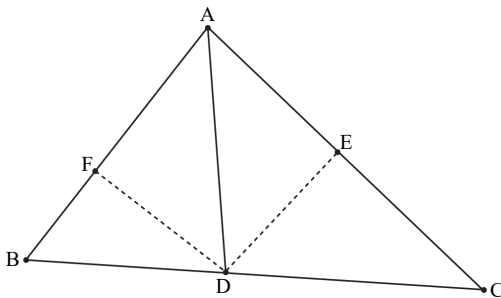


# מבחן בגרות מספר 11

## קניץ תשפ"א, מועד מיוחד, 2021

### פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.



א. נתון משולש ABC.

AD הוא חוצה הזווית A.

הקטעים DE ו-DF

מאונכים לצלעות AC

ו-AB בהתאמה.

בעבור מעגל שמרכזו

בנקודה D

ועובר בנקודה E:

(1) האם המעגל עובר בנקודה F? נמק תשובתך.

(2) האם ייתכן שהמעגל עובר גם בקודקוד המשולש C? נמק את תשובתך.

ב. בחוברת לימוד ישנה ומוכתמת נמצא התרגיל הבא:

הוכח כי לכל n טבעי מתקיים השוויון הבא:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{(2n-1)3^n + 1}{4}$$

אחד מהמספרים באגף ימין של התרגיל נמחק.

(1) מצא את המספר שנמחק.

(2) הצב את המספר שמצאת והוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, כי השוויון

מתקיים לכל n טבעי.





ג. לפניך סרטוט של גרף

פונקציה אי-זוגית  $f(x)$ .

(1) קבע אם הטענה הבאה נכונה.

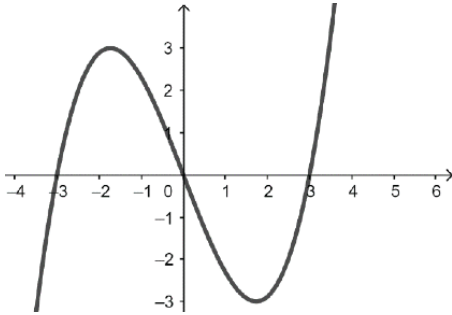
נמק.

$$\int_{-2}^2 f(x)dx > \int_{-2}^1 f(x)dx$$

(2) מצא את  $a$  עבורו מתקיים

השוויון הבא. נמק.

$$\int_0^4 f(x+a)dx = 0$$



ד. בקופסת ממתקים יש 5 חטיפי שוקולד חלב ו-7 חטיפי שוקולד מריר.

אמיר מוציא באקראי חטיף מהקופסה ונותן אותו לחבריו.

אמיר חוזר על הפעולה עד שהוא מוציא חטיף שוקולד חלב.

מהי ההסתברות שאמיר הוציא 5 חטיפים?

## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. נתונה סדרה חשבונית ובה  $2n+1$  איברים ( $n$  הוא מספר טבעי).

איברי הסדרה הם  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$  והפרש הסדרה הוא  $d$ .



א. הוכח כי ההפרש בין סכום האיברים הנמצאים במקומות

האי-זוגיים ובין סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים

שווה לאיבר האמצעי בסדרה.

נסמן ב- $T$  את ההפרש בין סכום האיברים ב- $n$  המקומות

האחרונים ובין סכום האיברים ב- $n$  המקומות הראשונים.

ב. הבע את  $T$  באמצעות  $d$  ו- $n$ .

נתון:

- סכום כל איברי הסדרה שווה לסכום האיברים

ב- $2n$  המקומות האחרונים.

- סכום האיברים הראשון והאחרון הוא 204.

-  $T = 3,468$ .

ג. מצא כמה איברים יש בסדרה.

3. בחממה גדולה של פרחים יש אך ורק פרחים לבנים וסגולים.

ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים לבנים גדולה פי 2.25 מן ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים סגולים.

א. חשב את אחוז הפרחים הסגולים בחממת הפרחים.

בחממה זו, לכמה מן הפרחים הלבנים, ורק להם, יש עלים גדולים. לשאר הפרחים יש עלים קטנים.

ירדן בחרה באקראי שני פרחים. ההסתברות שירדן בחרה פרח אחד שיש לו עלים קטנים ופרח אחד שיש לו עלים גדולים היא 0.455.

ב. (1) חשב את אחוז הפרחים בחממה שיש להם עלים גדולים.

(2) חשב את ההסתברות שירדן בחרה פרח סגול, אם ידוע שרק

לאחד מן הפרחים שהיא בחרה יש עלים גדולים.

ג. כינרת הכינה זר מ-7 פרחים לבנים בדיוק, שנבחרו באקראי בחממה.

חשב את ההסתברות שיש בזר פרח אחד לפחות שיש לו עלים גדולים ופרח אחד לפחות שיש לו עלים קטנים.

### פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. מנקודה A יוצאים שני ישרים,

המשיקים למעגל

בנקודות B ו-C

(ראה סרטוט).

נתון כי  $\angle CAB = 90^\circ$ .

BE ו-CE הם מיתרים במעגל.

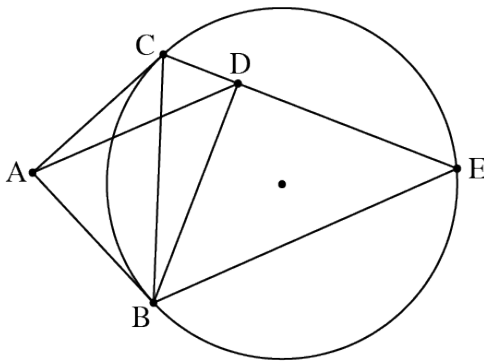
המעגל החוסם את המשולש ABC

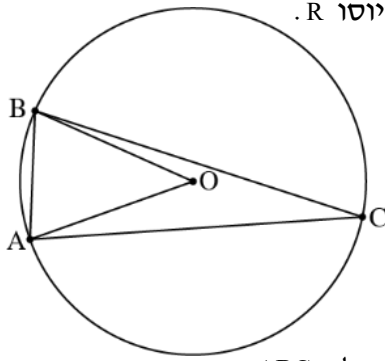
חותך את המיתר CE בנקודה D.

א. הוכח כי  $BD = DE$ .


ב. הוכח כי  $\triangle ADB \sim \triangle CEB$ .

ג. הוכח כי  $S_{\triangle ACEB} = 2 \cdot S_{\triangle ADB}$ .





5. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

נתון כי  $\angle BAC = 80^\circ$ .  


נסמן את הזווית AOB ב- $\alpha$ ,

ואת הצלע AB ב- $k$ .

א. הוכח כי  $\cos \alpha = 1 - \frac{k^2}{2R^2}$ .

נתון כי  $k = \frac{3}{4}R$ .

ב. הבע באמצעות R (בלבד) את שטח המשולש ABC.

נסמן ב- $r$  את רדיוס המעגל החסום במשולש AOB.

ג. חשב את היחס  $\frac{R}{r}$ . בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

### פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$ .

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  


(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים

(אם יש כאלה).

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$

המאונכות לצירים.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתון:  $f(k) = 1$ ,  $t < k$ ,  $t$  הוא פרמטר.

ג. קבע איזה מן הביטויים שלפניך גדול יותר. נמק את קביעתך.

$$\int_t^k f(x) dx \quad \underline{\text{או}} \quad \int_t^k (f(x))^2 dx$$

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $(f(x))^2$ ,

על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = -8$  ו- $x = -1$ .

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \cos(mx) + \cos(2x)$ , המוגדרת לכל  $x$ .

$m$  הוא פרמטר השונה מאפס. נתון כי בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{4}$ ,



שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  הוא  $-2$ .

א. הוכח כי  $m$  הוא מספר שלם שמתחלק ב-4 ללא שארית.

הצב  $m = 4$  וענה על סעיפים ב-ד שלפניך.

ענה על סעיף ב בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$

עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ ,

וקבע את סוגן.

ענה על סעיפים ג-ד בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ . הסבר את שיקולך.

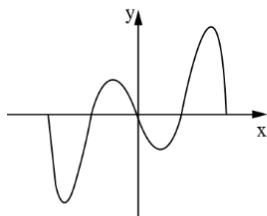
נתונה פונקציה  $k(x)$  המקיימת:  $k'(x) = f(x)$ ,  $k(0) = 0$ .

ד. אחד מן הגרפים א-ד שלפניך מתאר את הפונקציה  $k(x)$ .

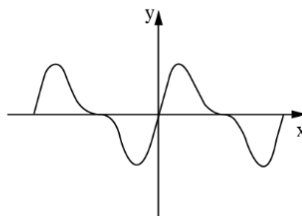
היעזר בתשובתך על סעיף ג וקבע איזה מן הגרפים שלפניך

מתאים לגרף הפונקציה  $k(x)$ . נמק את קביעתך.

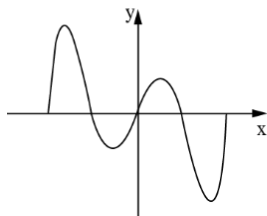
גרף ב



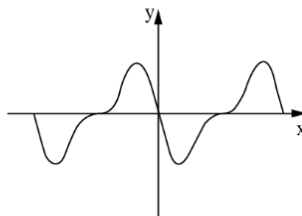
גרף א



גרף ד

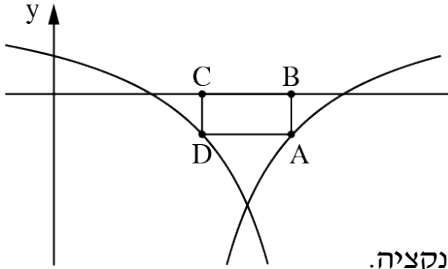


גרף ג



8. נתונות הפונקציות :

$$g(x) = \frac{x-3}{x-1}, \quad f(x) = \frac{x-1}{x-3}$$



ענה על סעיף א בעבור כל אחת

משתי הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף

הפונקציה עם הצירים.

בסרטוט שלפניך מתואר חלק מן הגרף של הפונקציה  $f(x)$ , חלק מן הגרף של

הפונקציה  $g(x)$ , ומלבן החסום ביניהם ובין ציר ה-  $x$ .

צלע BC של המלבן מונחת על ציר ה-  $x$ , והצלע הנגדית, AD, מחברת בין נקודה

על הגרף של  $f(x)$  ובין נקודה על הגרף של  $g(x)$ , כמתואר בסרטוט.

נסמן ב-  $t$  את שיעור ה-  $x$  של הנקודה A.

ב. קבע מהו תחום הערכים האפשרי של  $t$ .

ג. (1) הבע באמצעות  $t$  את אורך הצלע AB.

(2) הוכח ששיעור ה-  $x$  של הנקודה D הוא  $4-t$ .

(3) הבע באמצעות  $t$  את שטח המלבן ABCD.

ד. מצא את  $t$  שבעבורו שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי.

תשובות למבחן בגרות מספר 11 – קיץ תשפ"א, 2021, מועד מיוחד:

1. א. (1) כן. נימוק. ב. (2) לא. נימוק. ג. (1) כן. (2) הוכחה.

ג. (1) אינה נכונה. (2)  $a = -2$ . ד.  $\frac{35}{792}$ .

2. א. הוכחה. ב.  $T = n(n+1)d$ . ג. 67.

3. א. 40%. ב. (1) 35%. ג.  $\frac{8}{13}$ . ד. 0.9748.

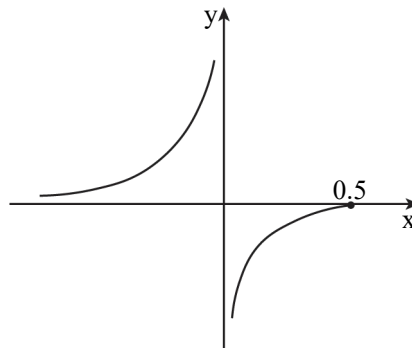
4. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

5. א. הוכחה. ב.  $0.72R^2$ . ג. 3.96.

6. א. (1)  $x \neq 0, x \leq \frac{1}{2}$ . (2)  $(\frac{1}{2}, 0)$ . (3)  $(x \rightarrow -\infty) y = 0, x = 0$ .

(4) עליה:  $0 < x < \frac{1}{2}$  או  $x < 0$ , ירידה: אין.

ב. ג.  $\int_t^k f(x) dx$  גדול יותר. ד.  $\frac{35}{72}$ .



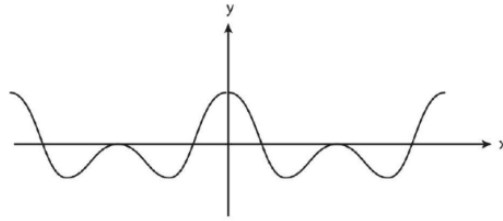
7. א. הוכחה.

ב. (1) עם  $x$  :  $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ ,  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ,  $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$  עם  $y$  :  $(0, 2)$ .

(2)  $(0, 2)$  מקסימום,  $(0.29\pi, -1.12)$  מינימום,  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  מקסימום,

$(0.71\pi, -1.12)$  מינימום,  $(\pi, 2)$  מקסימום.

ד. גרף א.



ג.

8. א. (1)  $x \neq 3$  :  $f(x)$ ,  $x \neq 1$  :  $g(x)$ .

(2)  $(1, 0)$  :  $f(x)$ ,  $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(0, 3)$  :  $g(x)$ .

ב.  $2 < t < 3$ .

ג. (1)  $\frac{3-t}{t-1}$ . (2) הוכחה. (3)  $\frac{(2t-4)(3-t)}{t-1}$ . ד.  $t = 2.41$ .





## מבחן בגרות מספר 12

קיץ תשפ"א, מועד ב, 2021

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. בסרטוט שלפניך: גרף של פונקציה אי-זוגית  $f(x)$



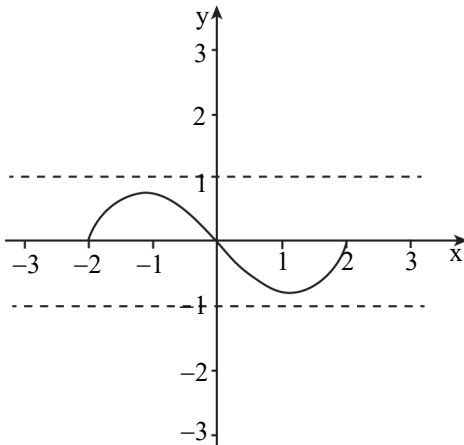
בתחום  $-2 \leq x \leq 2$

והישרים  $y = -1$ ,  $y = 1$ .

קבע עבור כל אחת מן הטענות

הבאות אם היא נכונה

או לא. נמק.



$$\int_0^2 f(x) dx = 0.5 \int_{-2}^2 f(x) dx \quad (1)$$

$$\int_{-2}^0 f(x) dx > \int_0^2 (f(x))^2 dx \quad (2)$$

ב. נתונה טבלת הסתברויות ובה מידע חלקי:



סה"כ	$\bar{A}$	A	
2a		$2a^2 - \frac{1}{8}$	B
			$\bar{B}$
1		a	סה"כ

(1) האם המאורעות A ו-B תלויים זה בזה? נמק.

(2) נתון:  $P(A \cap B) = 5P(\bar{A} \cap \bar{B})$ . חשב את a.

ג. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax^2 + 10x - 12}{2x^2 - 10x + 12}$ . הוא פרמטר חיובי.



ציר ה- $x$  והאסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים יוצרים מלבן ששטחו 2.

(1) מהו הערך של הפרמטר  $a$ ?

(2) נתונה הפונקציה:  $g(x) = f(x+3)$ .

מהו השטח של המלבן שנוצר על ידי ציר ה- $x$

והאסימפטוטות של הפונקציה  $g(x)$  המאונכות לצירים? נמק.

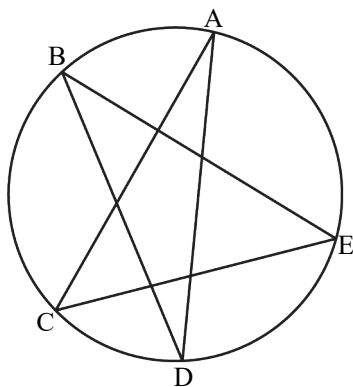
ד. במעגל שמרכזו בנקודה  $O$  חסום כוכב.



הנקודות  $E, D, C, B, A$  הן קודקודי הכוכב (ראה סרטוט).

הוכח שסכום 5 הזוויות של קודקודי הכוכב:

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ.$$



## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית,  $a_n$ , שאיבריה  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , והמנה שלה  $q$ .

א. הבע באמצעות  $a_1$  ו- $q$  את ערכי הסכומים שלפניך.



$$A = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{40} \quad (1)$$

$$B = a_4 + a_8 + a_{12} + \dots + a_{40} \quad (2)$$

נתון כי  $a_n$  היא סדרה עולה וכי  $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$ .

ב. מצא את ערכו של  $q$ .

בונים מן הסדרה  $a_n$  הנתונה סדרה הנדסית אין-סופית  $b_n$

המקיימת לכל  $n$  טבעי:  $b_n = 3 \cdot a_{n+1}$ .

ג. מצא את המנה של הסדרה  $b_n$ .

בונים סדרה הנדסית אין-סופית חדשה:  $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, -\frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_4}, \dots$ .

ד. הבע את הסכום של כל איברי הסדרה החדשה באמצעות  $a_1$ .

נתונה הסדרה:  $\frac{1}{a_1}, a_1, b_1$ .

ה. (1) האם ייתכן שסדרה זו חשבונית? נמק את תשובתך.

(2) האם ייתכן שסדרה זו הנדסית? נמק את תשובתך.

בתחרות ספורט שנערכת בבית ספר משתתפים תלמידים רבים.

כל משתתף צריך להצליח לעבור 3 מכשולים בזה אחר זה לפי הסדר.



משתתף שלא מצליח לעבור מכשול מודח מייד מן התחרות.

ההסתברות לעבור מכשול שונה ממכשול למכשול, אך שווה לכל המשתתפים.

משתתף שמצליח לעבור את שלושת המכשולים עולה לשלב חצי הגמר.

28% מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים.

ההסתברות שמשתתף שמצליח לעבור את שני המכשולים הראשונים יודח מן

התחרות גדולה פי 3 מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר.

א. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר.

ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון ולא יעבור את המכשול

השני היא 0.42.

ב. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות לא יצליח לעבור את

המכשול הראשון.

ג. בחרו באקראי שלושה משתתפים: עומר, גל וליאור.

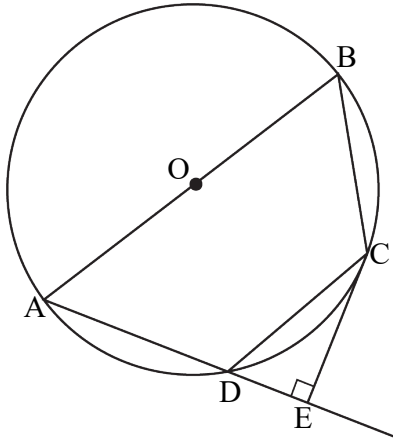
ידוע ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.

(1) חשב את ההסתברות שבדיוק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר.

(2) חשב את ההסתברות שמבין השלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.

פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O.



הצלע AB היא קוטר.

E היא נקודה על המשך AD

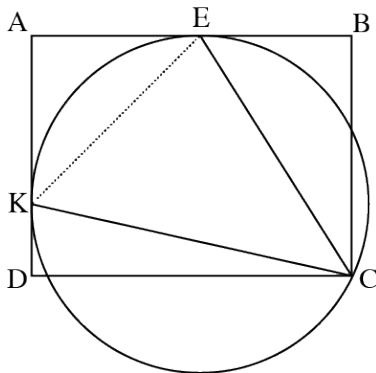
כך ש-  $CE \perp AE$ .

א. הוכח:  $\triangle CDE \sim \triangle ABC$ .

נתון גם:  $OD \perp AC$ ,  $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4}$ .

ב. הוכח כי  $OC \perp AD$ .

ג. הוכח כי CE משיק למעגל.



5. המרובע ABCD הוא מלבן

ששתיים מצלעותיו, AB ו-AD,

משיקות למעגל שרדיוסו R

בנקודות E ו- K בהתאמה

(ראה סרטוט).

הנקודה C נמצאת על המעגל.

א. הוכח כי  $\angle KCE = 45^\circ$ .

נתון:  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ,  $\angle KCD = \alpha$ .

ב. (1) הבע באמצעות  $\alpha$  את הזוויות של המשולש KCE.

(2) הבע באמצעות R ו- $\alpha$  את האורכים של צלעות המשולש KCE.

ג. הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס  $\frac{EB}{AE}$ .

נתון:  $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

ד. חשב את  $\alpha$ .

**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ,  $a > 0$  הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות  $a$ , אם יש צורך.



א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  היא זוגית.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$

עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$

המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה הפונקציה  $(f(x))^2$  שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה

של הפונקציה  $f(x)$ .

ד. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $(f(x))^2$ , וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$ . תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$  זהה לתחום

ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ה. הסתמך על הסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

הצב:  $a = 2$ .

ו. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$  על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי

הישרים  $x = 3$  ו- $x = 4$ .

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} + 3$ . ענה על הסעיפים שלפניך בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .



א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$ .

המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

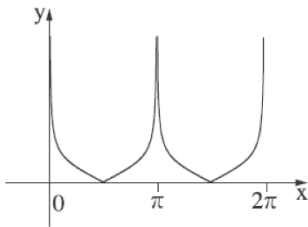
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתונות שתי פונקציות:  $k(x) = f(x) - 3$ ,  $g(x) = \sqrt{f(x) - 3}$ .

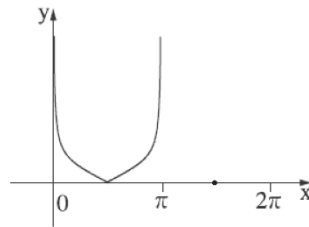
ג. אחד מן הגרפים א-ד שלפניך מתאר את הפונקציה  $k(x)$ , ואחד מן הגרפים

מתאר את הפונקציה  $g(x)$ .

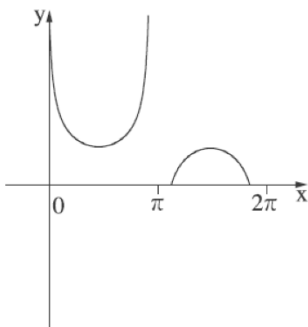
קבע איזה מן הגרפים מתאר כל אחת מן הפונקציות, ונמק את קביעותיך.



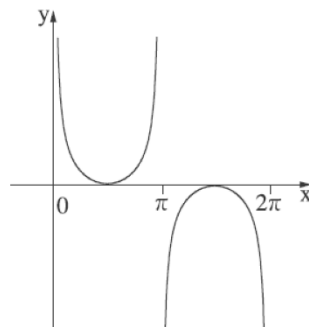
גרף ב



גרף א

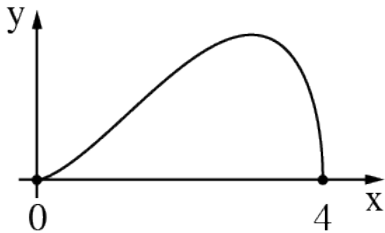


גרף ד



גרף ג

8. בסרטוט שלפניך מוצגת



הפונקציה  $f(x) = \sqrt{a \cdot x^4 + b \cdot x^3}$



נתון שתחום ההגדרה של

הפונקציה  $f(x)$  הוא  $0 \leq x \leq 4$ .

א. (1) הוכח כי  $b = -4 \cdot a$ .

(2) לפניך שתי טענות II-I.

רק אחת מהן נכונה.

קבע מהי הטענה הנכונה, ונמק את קביעתך.

I.  $a > 0$ ,  $b < 0$ .

II.  $a < 0$ ,  $b > 0$ .

הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה  $(f(x))^2$  המוגדרת גם בתחום

$0 \leq x \leq 4$ . מנקודה P מעבירים ישר המאונך לציר ה-x. M היא

נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה-x, ו-O היא ראשית הצירים.

ב. מהו שיעור ה-x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

ג. בעבור שיעור ה-x שמצאת בסעיף ב, בטא באמצעות a את השטח המקסימלי של המשולש PMO.

ד. אם ידוע כי שיעור ה-x של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה  $(f(x))^2$

אינה יורדת, מהו שיעור ה-x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.



תשובות למבחן בגרות מספר 12 – קיץ תשפ"א, מועד ב, 2021:

1. א. (1) אינה נכונה. נימוק. (2) נכונה. נימוק. ב. (1) כן. נימוק. (2)  $a = 0.375$ .

ג. (1)  $a = 4$ . (2) 2. ד. הוכחה.

2. א. (1)  $\frac{a_1 q (q^{40} - 1)}{q^2 - 1}$ . (2)  $\frac{a_1 q^3 (q^{40} - 1)}{q^4 - 1}$ . ב.  $q = 3$ . ג.  $q = 3$ . ד.  $-\frac{1}{12a_1}$ .

ה. (1) לא. (2) כן.

3. א. 0.07. ב. 0.3. ג. (1) 0.027. (2) 0.009.

4. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

5. א. הוכחה.

ב. (1)  $\sphericalangle KCE = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle CEK = 90^\circ - \alpha$ ,  $\sphericalangle CKE = 45^\circ + \alpha$ .

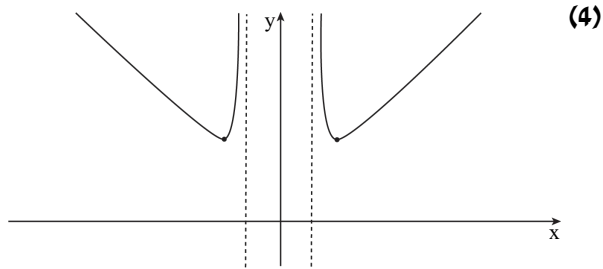
(2)  $KE = \sqrt{2} R$ ,  $CK = 2R \cos \alpha$ ,  $CE = 2R \sin(45^\circ + \alpha)$ .

ג.  $\frac{EB}{AE} = 2 \sin(45^\circ + \alpha) \cdot \sin(45^\circ - \alpha) = \sin(90^\circ + 2\alpha) = \cos 2\alpha$ . ד.  $22.5^\circ$ .

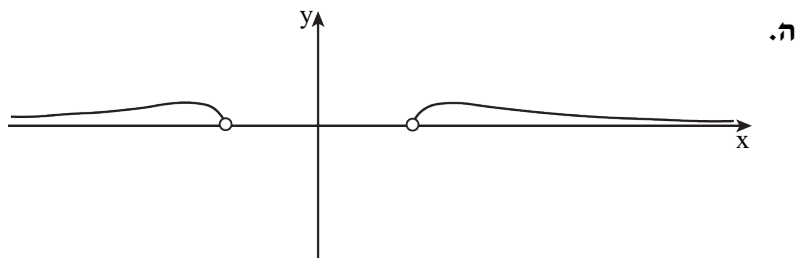
6. א.  $a < x$  או  $x < -a$ . ב. הוכחה.

ג. (1) אין. (2)  $x = -a$ ,  $x = a$ .

(3) מינימום  $(\sqrt{2}a, 2a)$ , מינימום  $(-\sqrt{2}a, 2a)$ .



ד.  $(-\sqrt{2}a, 4a^2), (\sqrt{2}a, 4a^2)$  .



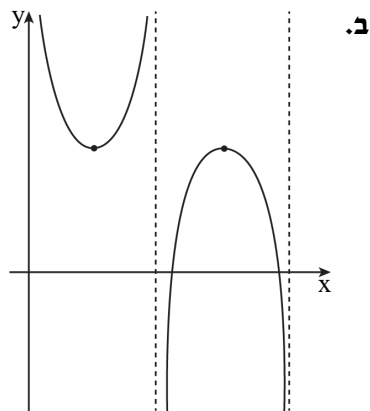
ו.  $\frac{71}{1,296}$  .

7. א.  $x \neq \pi, 0 < x < 2\pi$  (1) . ב.  $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$  (2) .

(3) עליה:  $\pi < x < 1.5\pi$  או  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  ,

ירידה:  $1.5\pi < x < 2\pi$  או  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  .

(4)  $(\frac{3\pi}{2}, 3)$  מקסימום ,  $(\frac{\pi}{2}, 3)$  מינימום .



ג. גרף ג',  $k(x)$  ; גרף א',  $g(x)$  .

8. א. (1) הוכחה. (2) II . ב.  $x = 3.2$  . ג.  $-41.94a$  . ד.  $x = 3$  .

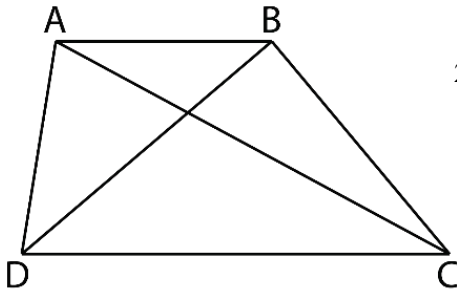


# מבחן בגרות מספר 13

## חורף תשפ"ב, מועד א, 2022

### פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.



א. לפינת טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ).



נתון: שטח המשולש ADC הוא 24

ושטח המשולש ADB הוא 12.

(1) חשב את היחס בין אורך

הבסיס הגדול

ובין אורך הבסיס הקטן

של הטרפז ABCD.

(2) חשב את שטח הטרפז ABCD.

ב. (1) הוכח באינדוקציה כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:



$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

(2) חשב את הסכום:  $17^2 + 19^2 + 21^2 + \dots + 33^2$

ג. בעבור כל אחת מן הטענות (1)–(2) שלפניך,



קבע אם היא נכונה לכל  $x$ . נמק.

$$(1) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$(2) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

ד. לפניך הגרף של פונקציה  $f(x)$ ,



המוגדרת לכל  $x$ .

לפונקציה  $f(x)$

אסימפטוטה אופקית

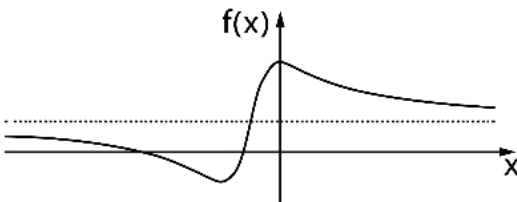
שמשוותה היא  $y=1$

(ראה סרטוט),

ו-2 נקודות קיצון בדיוק:

נקודת מקסימום  $(0,3)$

ונקודת מינימום  $(-2,-1)$ .




נגדיר את הפונקציה  $g(x) = f(-x) + 1$ . גם הפונקציה  $g(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .

(1) מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $g(x)$ . נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , וקבע את סוגן.

## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. נתונה סדרה חשבונית עולה  $A$  שאיבריה הם  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , והפרשה  $d$ .

מסמנים ב- $S_n$  את סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה  $A$ ,  
 לכל  $n$  טבעי. 

מגדירים סדרה נוספת,  $B$ , שאיבריה הם  $b_1, b_2, b_3, \dots$ .

איברי הסדרה  $B$  מקיימים  $b_n = S_{n+1} - S_n$ , לכל  $n$  טבעי.

א. (1) האם הסדרה  $B$  היא סדרה חשבונית? נמק.

(2) האם הסדרה  $B$  זהה לסדרה  $A$ ? נמק.

מסמנים ב- $T_n$  את סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה  $B$ , לכל  $n$  טבעי.

ב. הוכח כי לכל  $n$  טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \dots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-d}$$

$$\text{נתון: } b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$$

$$T_5 = -20$$

ג. חשב את  $b_1$  ואת  $d$  (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה  $A$  הנמצאים במקומות האי-זוגיים,

החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה

כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי שלם? נמק.

3. בקופסה יש שלוש סוכריות בטעם תות ושתי סוכריות בטעם מנטה.

ליאור מוציא באקראי סוכרייה מן הקופסה.

אם הסוכרייה היא בטעם מנטה – הוא מחזיר אותה לקופסה,

ואם היא בטעם תות – הוא אוכל אותה מייד.

א. ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

(1) חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.

(2) חשב את ההסתברות שליאור אכל את הסוכרייה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.

ב. ליאור מוציא מן הקופסה  $n$  סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה. הבע בעזרת  $n$  את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.

ג. ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה.

ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות,

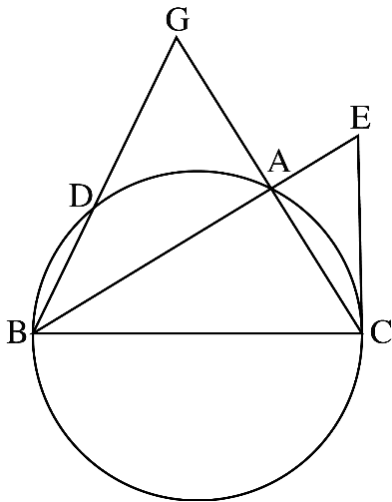
באופן המתואר בתחילת השאלה.

חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות,

שלושתן מאותה קופסה.



## פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R

(ראה סרטוט). הצלע BC היא קוטר במעגל.

AG הוא המשך הצלע CA.

הקטע GB חותך את המעגל

בנקודה D. נתון:  $GA = AC$ .

א. הוכח כי הישר AB חוצה את  $\angle GBC$ .

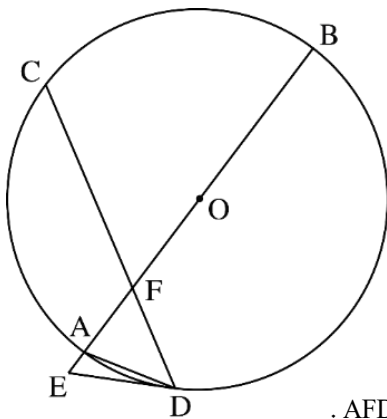
ב. הוכח כי  $\triangle GBC \sim \triangle GAD$ .

נתון כי  $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$ .

ג. הבע באמצעות R את אורך הצלע AC.

דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E.

ד. חשב פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC.



5. AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O.

המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה F.

המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך

הקוטר AB בנקודה E (ראה סרטוט).

נסמן:  $\angle ADE = \alpha$ .

א. הראה כי  $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$ .

נתון כי  $ED = FD$ .

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את גודל  $\angle CDA$ .

ג. הבע באמצעות R ו- $\alpha$  את שטח המשולש AFD.

ד. (1) הבע באמצעות  $\alpha$  את יחסי השטחים  $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$ .

(2) נתון כי  $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3}$ . מצא את  $\alpha$ .

**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - m)^2}$ ,  $m$  הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את תשובתיך באמצעות  $m$ , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$

המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת קיצון בנקודה שבה  $x = -1$ .

ב. מצא את הערך של  $m$ .

הצב בפונקציה  $f(x)$  את הערך של  $m$  שמצאת, וענה על הסעיפים ג-ה.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ה. נתונה הפונקציה  $g(x) = k \cdot f(x)$ ,  $k$  הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של  $g(x)$  מעבירים אנך לציר ה- $x$ .

נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$

ועל ידי ציר ה- $x$  הוא 1 (השטח שמימין לאנך).

מצא את הערך של  $k$ .





7. נתונה הפונקציה  $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$ .

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים

של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

(4) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  עם

ציר ה- $x$ . בתשובתך דייק שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ , אם ידוע כי

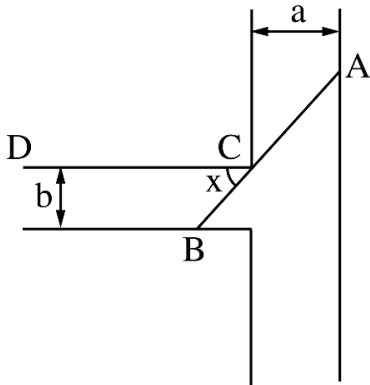
לפונקציית הנגזרת  $f'(x)$  אין נקודות קיצון.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. האם ייתכן שישר שמשוואתו  $y = 4x + c$  (פרמטר) ישיק לגרף

הפונקציה  $f(x)$ ? נמק.



8. תעלת מים ראשית ברוחב קבוע  $a$  מחוברת

בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע  $b$ .

הנקודה  $C$  היא נקודת המפגש בין דופן של

התעלה הראשית ובין דופן של התעלה

המשנית (ראה סרטוט). מהנדסת מתכנתת

סכר ישר, שיצא מן הנקודה  $A$  שבדופן התעלה

הראשית, יעבור דרך הנקודה  $C$  ויגיע עד

הנקודה  $B$  שבדופן התעלה המשנית. הסכר

ייצור זווית שגודלה  $x$  עם הדופן  $CD$  של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.

א. הבע באמצעות  $a$ ,  $b$  ו- $x$  את אורך הסכר  $AB$ .

נתון כי  $a = 2b$ .

ב. מצא את  $x$  שבעבורו אורך הסכר  $AB$  יהיה מינימלי.

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8. מצא את  $b$ .

תשובות למבחן בגרות מספר 13 – חורף תשפ"ב, מועד א, 2022 :

1. א. (1)  $\frac{DC}{AB} = \frac{2}{1}$  . (2)  $S_{ABCD} = 36$  . ב. (1) הוכחה. (2) 5,865 .

ג. (1) נכונה לכל- x . נימוק. (2) אינה נכונה לכל- x . נימוק.

ד. (1)  $y = 2$  . (2) (0,4) מקסימום, (2,0) מינימום.

2. א. (1) כן. (2) לא. ב. הוכחה. ג.  $b_1 = -5$  ,  $d = \frac{1}{2}$  . ד. 14 איברים.

3. א. (1) 0.366 . (2)  $\frac{20}{61} = 0.32787$  . ב.  $1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$  . ג. 0.0128 .

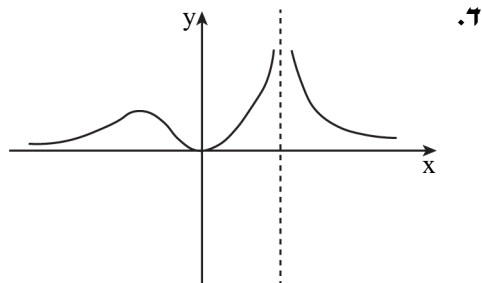
4. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג.  $AC = \frac{1}{2}R$  . ד. פי  $\frac{16}{15}$  .

5. א. הוכחה. ב.  $3\alpha$  . ג.  $\frac{R^2 \sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha}{\cos 2\alpha} = R^2 \tan 2\alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sin 3\alpha$  .

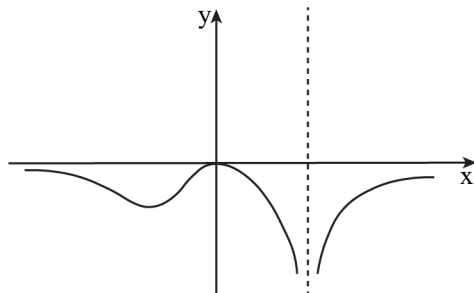
ד. (1)  $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$  . (2)  $\alpha = 15^\circ$  .

6. א. (1)  $x \neq \sqrt[3]{m}$  . (2)  $x = \sqrt[3]{m}$  ,  $y = 0$  . ב.  $m = 2$  .

ג. (0,0) מינימום ,  $\left(-1, \frac{1}{9}\right)$  מקסימום.



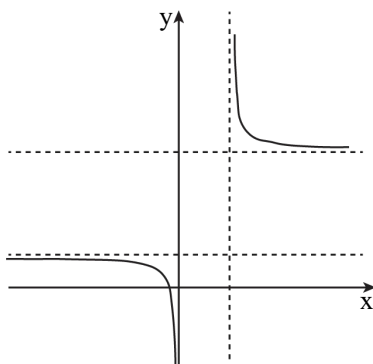
$k = -18$  (2)



ה. (1)

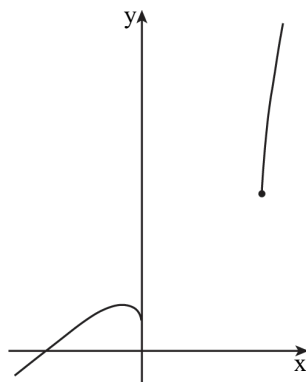
7. א. (1)  $x \geq 2$  או  $x \leq 0$  . ב. (2)  $x > 2$  או  $x < 0$  .

(3)  $x = 0$  ,  $x = 2$  ,  $(x \rightarrow +\infty) y = 5$  ,  $(x \rightarrow -\infty) y = 1$  . (4)  $(-0.342, 0)$  .



(5)

ב. (1)  $(-0.342, 0.764)$  מקסימום , מינימום  $(2, 6)$  , מינימום  $(0, 0)$  .



(2)

ג. לא.

8. א.  $AB = \frac{b}{\sin x} + \frac{a}{\cos x}$  . ב.  $x = 0.671$  ( $38.44^\circ$ ) . ג.  $b = 1.922$  .



## מבחן בגרות מספר 14

### חורף תשפ"ב, מועד נבצרים, 2022

#### פרק ראשון – שאלות קצרות

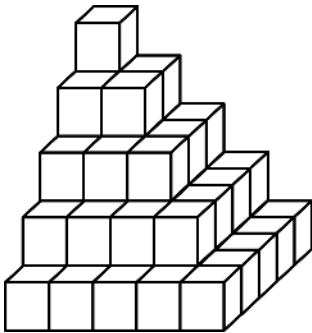
1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. נתון מרובע ABCD שבו גודלי הזוויות מהווים סדרה חשבונית עולה.

איברי הסדרה הם  $a_1, a_2, a_3, a_4$ .

הוכח כי אם מתקיים  $\sphericalangle D = a_3$ ,  $\sphericalangle C = a_4$ ,  $\sphericalangle B = a_2$ ,  $\sphericalangle A = a_1$ , אז אפשר

לחסום את המרובע ABCD במעגל.



ב. נתון מגדל קוביות ובו 5 קומות (ראה ציור).

הקומה התחתונה בנויה מ-25 קוביות

המסודרות בצורת ריבוע.

הקומה מעליה בנויה מ-16 קוביות

המסודרות בצורת ריבוע.

וכך הלאה עד לקומה העליונה

שבה יש קובייה אחת.

(1) כמה קוביות סך הכול דרושות כדי

לבנות באותו אופן מגדל שבו 7 קומות?

(2) נתון מגדל ובו 10 קומות הבנוי באותו אופן שבו בנוי המגדל המתואר

בתחילת סעיף ב. כמה קוביות צריך להוסיף למגדל זה, כדי שיהיו בו 100

קומת הבנויות באותו אופן? פרט את חישוביך.

תוכל להיעזר בנוסחה (לכל  $n$  טבעי):

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$



ג. נתונה הפונקציה  $f(x) = [\cos(x - \pi) + \cos(\pi - x)]^2 + 4(\sin(-x))^2 - 5$

המוגדרת לכל  $x$ .

האם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ ? נמק את תשובתך.

ד. הגרף שלפניך מתאר את הפונקציה  $g(x)$

שתחום ההגדרה שלה הוא  $x \neq -1$  ,  $x \neq 1$ .

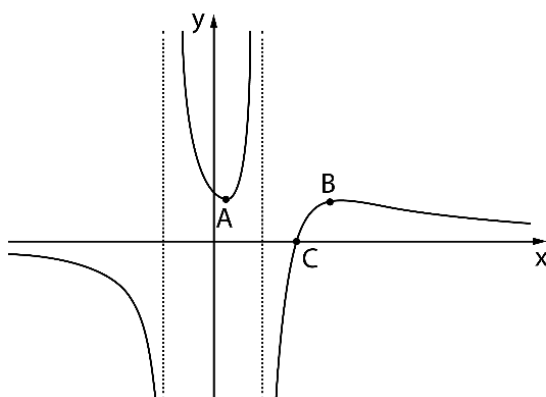
הישרים  $y = 0$  ,  $x = 1$  ,  $x = -1$  הם אסימפטוטות של הפונקציה  $g(x)$ .

הנקודה  $A(0.3, 1)$  היא נקודת המינימום היחידה של הפונקציה  $g(x)$ ,

הנקודה  $B(3, 1)$  היא נקודת המקסימום היחידה של הפונקציה  $g(x)$ ,

והנקודה  $C(2, 0)$  היא נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה  $g(x)$

עם ציר ה- $x$ .



(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $\frac{1}{g(x)}$ .

(2) בכמה נקודות נפגשים הגרף של  $g(x)$  והגרף של  $\frac{1}{g(x)}$ ? נמק את תשובתך.

## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , ומנתה היא q.

כל איברי הסדרה A שונים מאפס.



א. האם הסדרה  $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$  היא סדרה הנדסית? הוכח את תשובתך.

ב. (1) מסמנים ב- $S_n$  את הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה A ( $n$  טבעי).

$$\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \quad \text{מתקיים:}$$

(2) נתון:  $a_1 = 1$ ,  $q = 3$ . סכום n האיברים הראשונים בסדרה A

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \quad \text{גדול פי 6561 מן הסכום:}$$

מצא את n.

הסדרה B מתקבלת מן הסדרה A על ידי הפיכת הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A.

איברי הסדרה B הם  $b_1, b_2, b_3, \dots$ .

נסמן ב- $T_m$  את הסכום של m האיברים הראשונים של הסדרה B. נתון כי m הוא מספר טבעי אי-זוגי.

$$\frac{T_m}{b_1 \cdot b_m} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \dots + \frac{1}{a_m} \quad \text{נתונה נוסחה:}$$

קבע אם הנוסחה הנתונה נכונה. הוכח את תשובתך.

כדי להתקבל ללימודים במכללה מסוימת יש לעבור מבחן קבלה.

כל השאלות במבחן הן מתוך מאגר שיש בו  $n$  שאלות שונות.

לנבחנים יש גישה למאגר והם יכולים להתכונן למבחן באמצעותו.

ביום הבחינה, כל נבחן מוציא באקראי מתוך קופסה מלאה בפתקים שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה.

בכל אחד מן הפתקים כתובה שאלה אחת מתוך מאגר השאלות.

מספר הפתקים שבקופסה שווה למספר השאלות שבמאגר,

ובכל פתק כתובה שאלה אחרת.

לאחר שהוציא הנבחן שלושה פתקים מן הקופסה וקרא את שלוש השאלות,

הוא מחזיר את שלושת הפתקים לקופסה.

הנבחן יתקבל למכללה אם הוא יענה נכון על שתי שאלות לפחות מתוך שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא.

נתנאל התכונן למבחן באמצעות מאגר השאלות.

הוא ידע לענות נכון רק על 20 שאלות מתוך  $n$  השאלות שבמאגר.

על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ידוע כי ההסתברות של נתנאל לענות נכון על שאלה אחת לפחות מבין שתי

השאלות שבשני הפתקים הראשונים שהוא הוציא היא  $\frac{34}{69}$ .

**א. (1) מצא את  $n$ .**

**(2) מהי ההסתברות שנתנאל יתקבל למכללה?**

**ב. אם ידוע כי נתנאל התקבל למכללה, מהי ההסתברות שהוא לא ענה נכון על**

**השאלה שבפתק הראשון שהוא הוציא?**

רמי התכונן גם הוא למבחן באמצעות מאגר השאלות.

הוא ידע לענות נכון על 40 שאלות מתוך  $n$  השאלות שבמאגר.

על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

**ג. האם ההסתברות שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא**

**הוציא באקראי גדולה פי 2 מן ההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש**

**השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי?**

**נמק את תשובתך.**

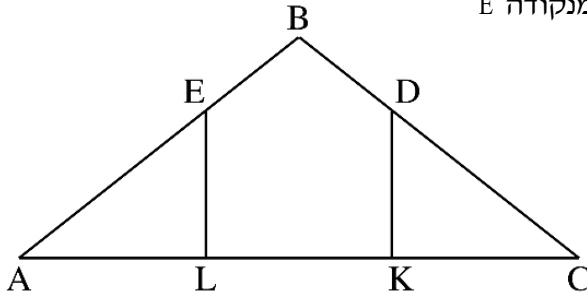
פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. בצויר שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים  $ABC$ ,  $BA = BC$ .

מנקודה  $D$  הנמצאת על השוק  $BC$  הורידו אנך לבסיס,



והוא חותך אותו בנקודה  $K$ . מנקודה  $E$



הנמצאת על השוק  $BA$

הורידו אנך לבסיס,

והוא חותך אותו בנקודה  $L$ .

נתון:  $AL = LK = KC$ .

א. חשב את  $\frac{BD}{DC}$ .

הקטעים  $DL$  ו- $EK$  נפגשים בנקודה  $G$ .

ב. הוכח כי המרובע  $BDGE$  הוא דלתון.

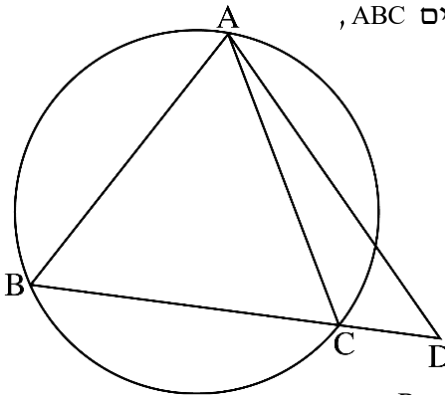
נתון:  $AC = 45$ . היקף המרובע  $EDKL$  הוא 54.

ג. חשב את אורך הקטע  $BG$ .

ד. האם קיימת נקודה  $F$  שנמצאת על הישר  $BG$  שעבורה המרובע  $BDFE$  הוא

בר-חסימה במעגל? נמק את תשובתך.

5. בצויר שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים  $ABC$ ,



שחסום במעגל שרדיוסו  $R$ ,  $AB = AC$ .



האריכו את הבסיס  $BC$  עד לנקודה  $D$

והעבירו ישר מנקודה  $D$  לנקודה  $A$ .

נתון:  $\angle CAD = \alpha$ ,  $\angle BAC = 2\alpha$ .

א. הוכח כי רדיוס המעגל החוסם

את משולש  $ABD$  שווה לרדיוס

המעגל החוסם את משולש  $ACD$ .

ב. הבע את שטח משולש  $ACD$  באמצעות  $R$  ו- $\alpha$ .

נסמן ב- $m$  את היחס בין שטח המשולש  $ACD$  לבין שטח המשולש  $ABC$ .

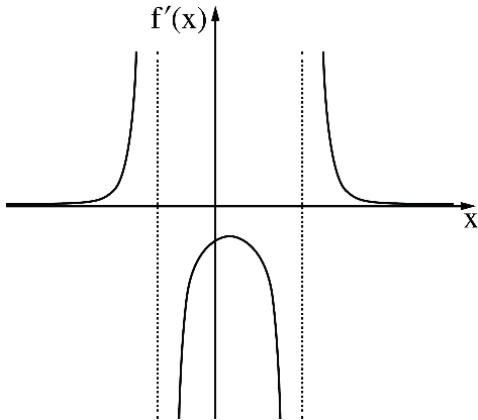
ג. (1) האם ייתכן כי  $m = 0.5$ ? נמק את תשובתך.

(2) נתון כי  $m = 0.6$ . מצא את גודלי זוויות המשולש  $ABC$ .



**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה פונקציה  $f(x)$  המוגדרת בתחום  $x < b$ ,  $b < x < c$ ,  $c < x$



וגזירה בכל תחום הגדרתה.

בסרטוט שלפניך מתואר הגרף

של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

לפונקציית הנגזרת  $f'(x)$

יש נקודת קיצון אחת בלבד

ושלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים:

$$x = c, x = b, y = 0$$

שיעור ה- $x$  של נקודת הקיצון של

פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  הוא  $a$ .

$a$ ,  $b$ ,  $c$  הם פרמטרים.

**א.** הבע את תשובותיך באמצעות  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , אם יש צורך.

**(1)** מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

**(2)** מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה ( $\cup$ ) ואת תחומי הקעירות

כלפי מטה ( $\cap$ ) של הפונקציה  $f(x)$ .

נתון כי גרף הפונקציה  $f(x)$  עובר בנקודה  $(a, 0)$ .

**ב.** סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

$$\text{נתון גם כי } f(x) = \frac{18 - 36x}{(x^2 - x - 6)^2}$$

**ג.** מצא את  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

**ד.** **(1)** הראה כי בתחום  $b < x < c$  מתקיים:  $f'(x) \cdot (f(x))^2 \leq 0$ .

**(2)** חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f'(x) \cdot (f(x))^2$ ,

על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = 0$  ו- $x = 2a$ .

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \tan(x) + \frac{1}{x}$ .

ענה על הסעיפים א-ב בעבור התחום  $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ .



א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לציר ה- $x$ .

גרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את ציר ה- $x$  בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד ששיעוריה  $(2.798, 0)$  בקירוב.

ב. מצא את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה גם הפונקציה  $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ , המוגדרת לכל  $x \neq 0$ .

ג. האם הפונקציה  $g(x)$  היא זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית? ולא אי-זוגית? הוכח את תשובתך.

ד. (1) הראה כי בתחום  $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  שיעור ה- $x$  של אחת מנקודות הקיצון של

הפונקציה  $g(x)$  שווה לשיעור ה- $x$  של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ , וקבע את סוגה של נקודת קיצון זו.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ .

8. חותכים חוט שאורכו  $k$  לשני חלקים. מחלק אחד של החוט יוצרים

משולש שווה-צלעות ומן החלק האחר יוצרים מעגל.



נסמן ב- $x$  את אורך צלע המשולש.

א. הבע באמצעות  $k$  את תחום ההגדרה של  $x$ .

ב. הבע באמצעות  $k$  את אורך צלע המשולש,

שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. הראה כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי,

אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל במעגל שהתקבל.

תשובות למבחן בגרות מספר 14 – חורף תשפ"ב, מועד נבצרים, 2022 :

1. א. הוכחה. ב. (1) 140 קוביות. (2) 337,965 קוביות.  
 ג. אין נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ . ד. (1)  $x \neq 1, x \neq -1, x \neq 2$ . (2) 4 פעמים.

2. א. כן. ב. (1) הוכחה. (2)  $n = 9$ . ג. הנוסחה נכונה.

3. א. (1)  $n = 70$ . (2)  $\frac{76}{391}$ . ב.  $\frac{25}{84}$ . ג. ההסתברות אינה גדולה פי 2.

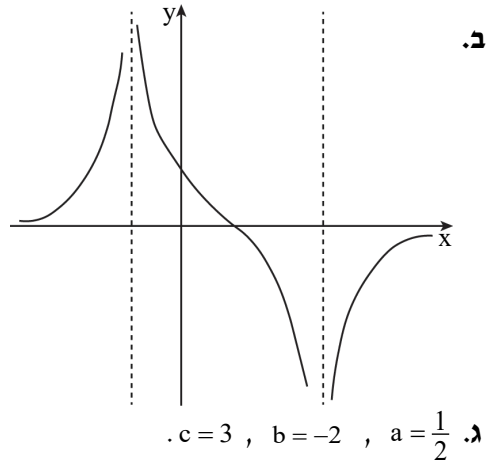
4. א.  $\frac{1}{2}$ . ב. הוכחה. ג. 12. ד. כן.

5. א. הוכחה. ב.  $R^2 \cos^2 \alpha \tan 2\alpha$ . ג. (1) לא ייתכן. (2)  $73.22^\circ, 33.56^\circ$ .

6. א. (1) עלייה:  $x > c$  או  $x < b$ , ירידה:  $b < x < c$ .

- (2) תחומי הקעירות כלפי מעלה ( $\cup$ ):  $x < b$  או  $b < x < a$ ,

- תחומי הקעירות כלפי מטה ( $\cap$ ):  $a < x < c$  או  $c < x$ .



- ד. (1) הוכחה. (2)  $\frac{1}{12}$ .

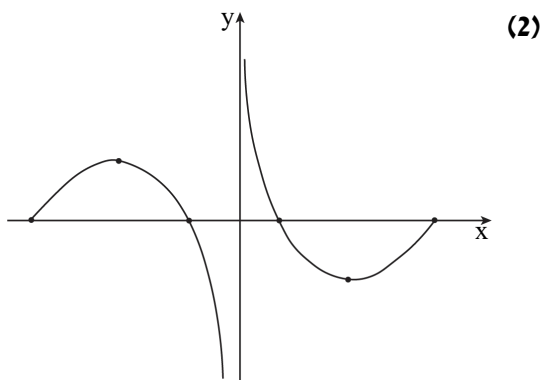
7. א. (1)  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$  או  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . (2)  $x = \frac{3\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = 0$ .

ב. תחומי החיוביות של  $f(x)$ :  $2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$  או  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

תחומי השליליות של  $f(x)$ :  $\frac{\pi}{2} < x < 2.798$ .

ג. הינה פונקציה אי-זוגית.

ד. (1) הוכחה. סוג הקיצון הוא מינימום.



8. א.  $0 < x < \frac{k}{3}$ . ב.  $0.21k$ . ג. הוכחה.



# מבחן בגרות מספר 15

## קיץ תשפ"ב, מועד א, 2022

### פרק ראשון – שאלות קצרות

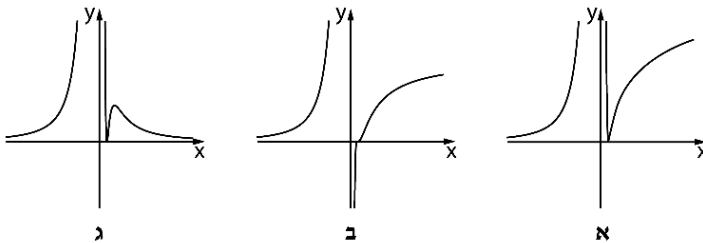
1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

- א. (1) בעבור כל  $n$  טבעי, הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי הביטוי  $4^n - 1$  מתחלק ב-3 ללא שארית.
- (2) נתון:  $p$  הוא מספר שלם. כתבו דוגמה לערך של  $p$  שבעבורו הביטוי  $4^{n+1} + p$  מתחלק ב-12 ללא שארית, לכל  $n$  טבעי.



ב. נתונה הפונקציה:  $f(x) = (2 - \frac{1}{x})^3$ .

- (1) אחד מן הגרפים א-ג מתאר את פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ . קבעו איזה מהם ונמקו בקצרה.

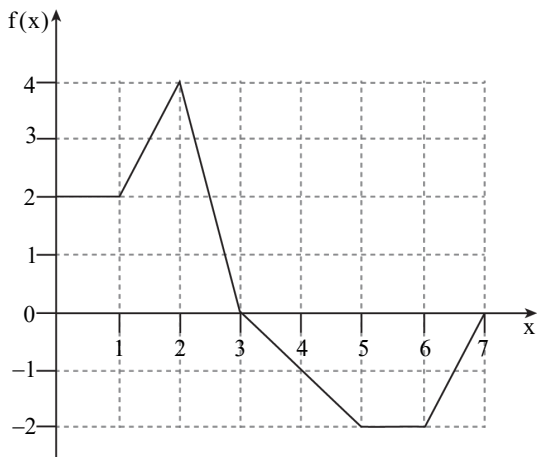


- (2) קבעו כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה  $f(x)$ . נמקו את התשובה.

ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה  $f(x)$  המוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 7$ ,



ונתונה הפונקצייה  $h(t) = \int_0^t f(x)dx$  בתחום זה.



(1) חשבו את הערכים של  $h(5)$ ,  $h(3)$ ,  $h(0)$ .

(2) קבעו באיזה תחום  $h(t)$  יורדת. נמקו את התשובה.

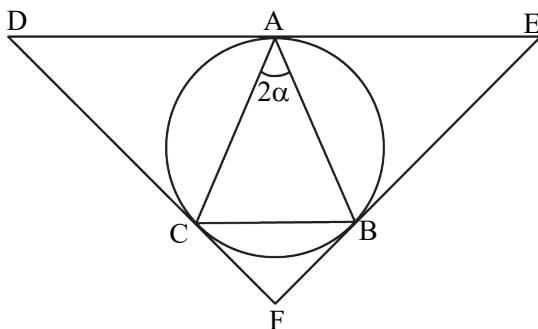
ד. משולש  $ABC$  שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) חסום במעגל (ראו סרטוט).



נסמן את זווית הראש של המשולש ב- $2\alpha$ .

דרך כל אחד מקודקודיו המשולש מעבירים משיק למעגל.

המשיקים נפגשים בנקודות  $D$ ,  $E$  ו- $F$ , כמתואר בסרטוט.



הביעו באמצעות  $\alpha$  את זווית המשולש  $DEF$ .

## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. סדרה I היא סדרה הנדסית אין-סופית שאיבריה הם  $a_1, a_2, a_3, \dots$

ומנתה היא  $9 \cdot r^2$ . נתון:  $0 < r < \frac{1}{3}$ .



בין כל שני איברים בסדרה I הכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם  $b_1, b_2, b_3, \dots$  ומנתה היא  $q$ .

א. (1) הביעו את  $q$  באמצעות  $r$ .

(2) הסבירו מדוע שתי הסדרות I ו-II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי  $\frac{4}{3}$  מסכום סדרה I.

ב. חשבו את  $q$ .

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 12.

ג. מצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות

שמתחלקים ב-5 ( $b_5, b_{10}, b_{15}, \dots$ ).

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחריו אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

3. נטע משחקת במשחק מסוים.

במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות:



ניצחון, תיקו והפסד.

ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק.

נסמן ב- $p$  את ההסתברות שנטע תפסיד במשחק ( $p > 0$ ).

בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.

נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה,

ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא  $4.5p$ .

א. מצאו את הערך של  $p$ .

נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.

ב. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב-3 משחקים לפחות.

ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

ד. (1) מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.

(2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות.

מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים

וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?



## פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O.

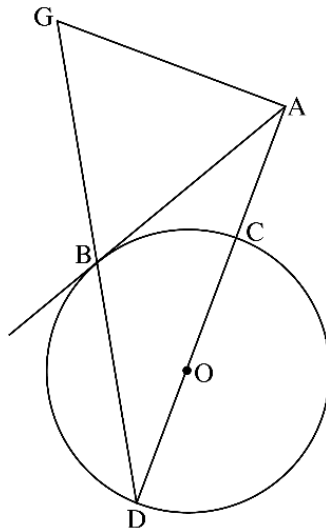
מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:

הישר AB משיק למעגל בנקודה B,

הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O

וחותך את המעגל בנקודות C ו-D, והישר AG מאונך לישר AD (ראו סרטוט).

הנקודות B, D ו-G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט. נסמן:  $\angle ADB = \alpha$



א. הביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות  $\alpha$ .

ב. הוכיחו:  $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$ .

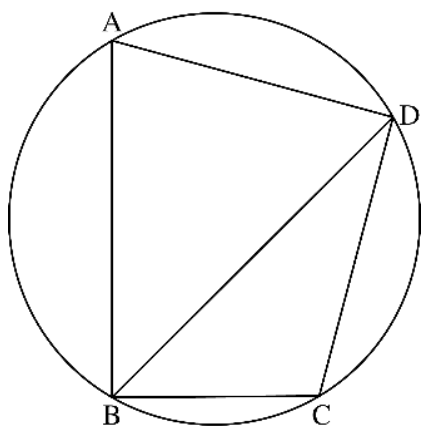
נתון:  $AG = 8$ ,  $AC = \frac{1}{2}DC$ .

ג. חשבו את R.

נסמן ב-S את שטח המשולש BDC.

ד. (1) הוכיחו:  $\triangle ADG \sim \triangle BDC$ .

(2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.



5. מרובע ABCD חסום במעגל שרדיוסו R

ומרכזו O (ראו סרטוט).



נסמן:  $\angle DAB = \alpha$ , היא זווית חדה.

א. הביעו את אורך האלכסון BD

באמצעות  $\alpha$  ו-R.

נתון:  $BC = R$ ,  $CD = R\sqrt{2}$ .

ב. חשבו את  $\alpha$ .

נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

ג. חשבו את גודל הזווית ABD.

נסמן ב- $h_1$  את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD,

וב- $h_2$  את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD.

ד. חשבו את  $\frac{h_1}{h_2}$ .

**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקצייה  $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$ .



- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .  
 (2) האם הפונקצייה  $f(x)$  היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית?

הוכיחו את התשובה.

- (3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה  $f(x)$ .

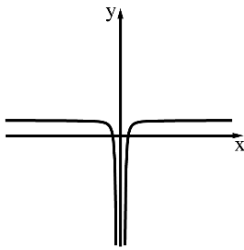
נתונות שתי פונקציות:  $f(x)$  ו- $g(x)$ .  $f'(x)$  היא פונקציית הנגזרת של  $f(x)$ .  
 $g(x)$  מקיימת  $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ .

הפונקציות  $f'(x)$  ו- $g(x)$  מוגדרות באותו התחום כמו הפונקצייה  $f(x)$ .

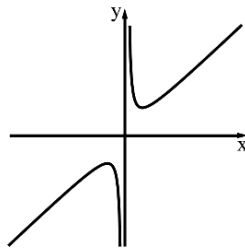
ב. כל אחד מן הגרפים III-I שלפניכם מתאר את אחת

הפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$  ו- $g(x)$ .

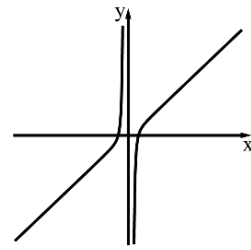
לכל אחת מן הפונקציות כתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.



גרף III



גרף II



גרף I

- ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקצייה  $g(x)$  עם ציר ה- $x$ .

- ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקצייה  $g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$

ועל ידי הישרים  $x = \frac{1}{4}$  ו- $x = 4$ .

ה. נתון:  $1 < a$  הוא פרמטר. חשבו את  $\int_{\frac{1}{a}}^a g(x) dx$ .

נתונה הפונקצייה  $h(x) = \int_1^x f'(t) dt$ . נתון כי הפונקצייה  $h(x)$  מוגדרת בתחום  $1 \leq x$ .

- ו. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה  $h(x)$ , וקבעו את סוגה.

7. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{2(\cos x)^2 + \sin 2x}{2 \cos x}$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .  
(2) הסבירו מדוע לפונקצייה  $f(x)$  אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה- $x$ .



(3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם הצירים.

ב. (1) הראו כי לכל  $x$  בתחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$

$$\text{מתקיים } f'(x) = \cos x - \sin x.$$

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ ,

וקבעו את סוגן.

ג. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

(2)  $k$  הוא מספר.

מצאו את כל ערכי  $k$  שבעבורם יש למשוואה  $f(x) = k$

פתרון יחיד (בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ ).

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ ,

על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי שני הישרים  $x = \frac{3}{4}\pi$  ו- $x = \frac{5}{4}\pi$ .

8. נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$  ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה  $g(x)$ .



(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם גרף הפונקצייה  $g(x)$ .

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה  $f(x)$ , והנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה-x.

נתון כי שיעור ה-x של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה-x של נקודות החיתוך של הפונקצייה  $f(x)$  עם הפונקצייה  $g(x)$ .

נסמן ב-t את שיעור ה-x של הנקודה A. t הוא פרמטר.

ב. הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB.

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים.

מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB.

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי?

נמקו את התשובה.

תשובות למבחן בגרות מספר 15 – קיץ תשפ"ב, מועד א, 2022 :

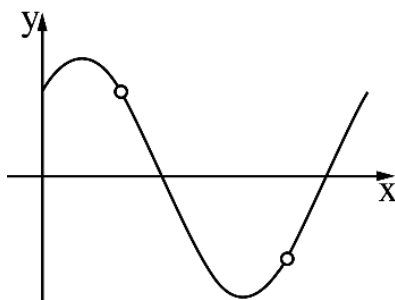
1. א. (1) הוכחה. (2) לדוגמה:  $p = 8$ . ב. (1) גרף ג. (2) שתי נקודות פיתול.
- ג. (1)  $h(0) = 0$ ,  $h(3) = 7$ ,  $h(5) = 5$ . (2)  $3 < x < 7$ .
- ד.  $\sphericalangle F = 180^\circ - 4\alpha$ ,  $\sphericalangle E = \sphericalangle D = 2\alpha$ .
2. א. (1)  $q = 3r$ . (2) הסבר. ב.  $q = \frac{1}{3}$ . ג.  $S = \frac{48}{121} \approx 0.397$ . ד. 2. ה. הוכחה.
- א.  $\frac{1}{6}$ . ב.  $\frac{1}{2}$ . ג.  $\frac{1}{8}$ . ד. (1)  $\frac{3125}{7776} \approx 0.4019$ . (2)  $\frac{54}{4651} \approx 0.0116$ .
- א.  $\sphericalangle BAG = 2\alpha$ ,  $\sphericalangle AGB = \sphericalangle ABG = 90 - \alpha$ . ב. הוכחה.
- ג.  $R = \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4.619$ . ד. (1) הוכחה. (2)  $S_{ADG} = 3S$ .
- א.  $BD = 2R \sin(\alpha)$ . ב.  $\alpha = 75^\circ$ . ג.  $\sphericalangle ABD = 45^\circ$ . ד.  $\frac{h_1}{h_2} = 3 + \sqrt{3} \approx 4.732$ .
- א. (1)  $x \neq 0$ . (2) אי זוגית.
- (3) תחומי עלייה:  $1 < x$ ,  $x < -1$ , תחומי ירידה:  $0 < x < 1$ ,  $-1 < x < 0$ .
- ב.  $f(x)$  - גרף II,  $f'(x)$  - גרף III,  $g(x)$  - גרף I. ג.  $(1,0)$ ,  $(-1,0)$ .
- ד. 56.25. ה. 0. ו. מינימום:  $(1,0)$ .

7. א. (1)  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  ,  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$  ,  $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$  (2) הסבר .

(3)  $(\frac{7\pi}{4}, 0)$  ,  $(\frac{3\pi}{4}, 0)$  ,  $(0, 1)$  . ב. (1) הוכחה. (2) מינימום,  $(0, 1)$

מקסימום  $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$  , מקסימום  $(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2})$  , מינימום  $(2\pi, 1)$  .

ג. (1)



(2)  $k = -1$  ,  $k = -\sqrt{2}$  ,  $k = \sqrt{2}$  . ד.  $\sqrt{2}$

8. א. (1) תחום של  $f(x)$  : כל  $x$  , תחום של  $g(x)$  :  $0 \leq x$  (2)  $(1, 1)$  ,  $(0, 0)$  .

ב.  $AB = t - t^2$  . ג.  $S_{OAB} = \frac{128}{3125} \approx 0.04096$  . ד. לא .



# מבחן בגרות מספר 16

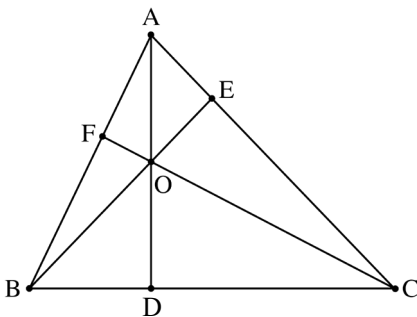
קיץ תשפ"ב, 2022, מועד ב

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי בעבור כל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$



ב. במשולש חד זווית ABC,

הגבהים AD, BE, CF

נפגשים בנקודה O (ראו סרטוט).

נתון כי סכום המרחקים של

הנקודה O מקודקודי

המשולש הוא 20.

(1) הוכיחו שאפשר לחסום

במעגל כל אחד מן המרובעים

AEOF, BDOF, CDOE.

(2) מהו סכום ההיקפים של המעגלים

החוסמים את המרובעים AEOF, BDOF, CDOE?



ג. נתונה הפונקצייה  $f(x) = 3 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 25}}$ .



(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ ?

(2) ידוע כי האסימפטוטות של גרף הפונקצייה  $f(x)$  המאונכות לצירים,

חותכות זו את זו. חשבו את השטח הכלוא בין האסימפטוטות.

נמקו את התשובה.

ד. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{a \cdot x}{x^2 - 4}$ , המוגדרת עבור  $x \neq 2$  ו- $x \neq -2$ .



$a \neq 0$  הוא פרמטר.

אחד מן הגרפים א-ה שלפניכם מתאים לפונקצייה  $f(x)$  בעבור  $a > 0$ ,

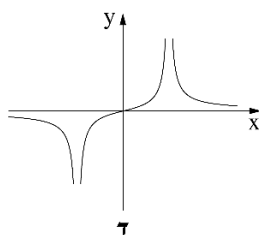
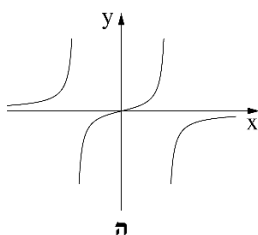
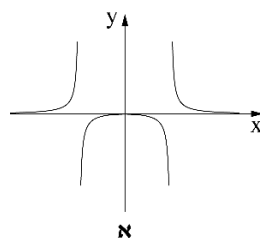
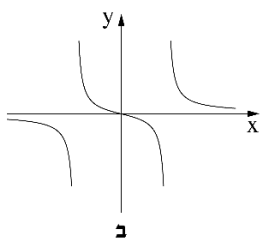
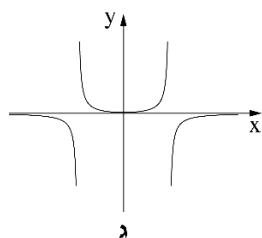
ואחד מהם מתאים לפונקצייה  $f(x)$  בעבור  $a < 0$ .

(1) איזה מן הגרפים מתאים לפונקצייה  $f(x)$  בעבור  $a > 0$ ?

נמקו את התשובה בקצרה.

(2) איזה מן הגרפים מתאים לפונקצייה  $f(x)$  בעבור  $a < 0$ ?

נמקו את התשובה בקצרה.



## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא  $a_n$  ומנתה היא q .

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים  $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$  .



בעבור  $2k$  האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים בסדרה שווה  $10,935 \cdot a_1$  .

נתון:  $a_{2k-2} = 1,215$  .

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

נתון:  $a_1 = 5$  .

ג. (1) קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.

(2) מצאו את k .

מן הסדרה A בונים את הסדרה האין סופית B באופן הזה:  $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$  .

ד. הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי-זוגיים

כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם:  $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$  .

ה. מצאו את סכום הסדרה C .

3. בעיר גדולה בישראל נערך סקר ובו נבדקה רמת השליטה בשפה האנגלית בקרב

תושבי העיר. בסקר השתתפו אנשים רבים - מבוגרים וצעירים.



בסקר נמצא שמספר המבוגרים ששולטים באנגלית גדול פי 3 ממספר הצעירים

ששולטים בה, ומספר המבוגרים שלא שולטים באנגלית גדול פי  $2\frac{2}{3}$  ממספר

המבוגרים ששולטים בה.

נסמן ב- $p$  את ההסתברות לבחור באקראי צעיר ששולט באנגלית מבין כלל

המשתתפים בסקר.

א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית מבין כלל

המבוגרים שהשתתפו בסקר.

ב. בוחרים באקראי שלושה מבוגרים מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר.

מצאו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם שולטים באנגלית.

ג. (1) הביעו באמצעות  $p$  את ההסתברות לבחור באקראי צעיר שלא שולט

באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

(2) הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור  $p$  הוא  $0 < p < \frac{1}{12}$ .

ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים

באנגלית שווה להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר

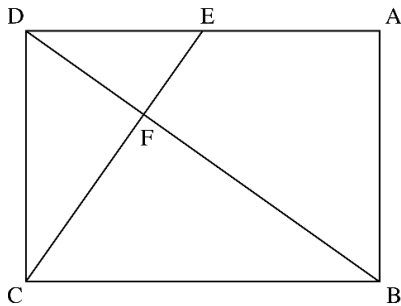
שלא שולטים באנגלית.

ד. מצאו את הערך של  $p$ .

ה. האם המאורעות "לשלוט באנגלית" ו"להיות מבוגר" תלויים זה בזה?

נמקו את תשובתכם.

## פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. במלבן ABCD, הנקודה E נמצאת על

הצלע AD. הקטע CE חותך את

האלכסון BD בנקודה F.

המרובע EABF הוא בר חסימה במעגל.

א. הוכיחו:  $\triangle DAB \sim \triangle BFC$ .

נתון:  $DE = EA$ .

ב. חשבו את היחס  $\frac{EF}{FC}$ .

נסמן את שטח המשולש DEF ב-S.

ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו-BFC באמצעות S.

ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC.

נסמן:  $DE = a$ .

ה. (1) הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a.

(2) הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a.



5. נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.

מנקודה A, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה D וישר אחר,

שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט.

נסמן:  $\angle AOB = \beta$ ,  $\angle AOD = \alpha$ .

א. הביעו באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו-R,

אם יש צורך, את: (1) אורך הקטע AO.

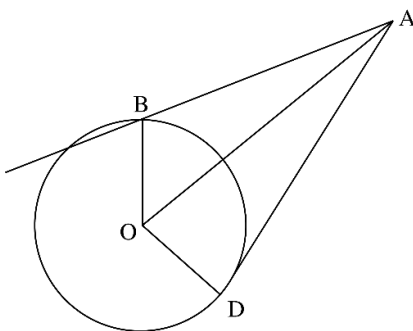
(2) אורך הקטע AB.

נתון:  $AB = \sqrt{2}R$ .

ב. הוכיחו כי  $\cos \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}$ .

משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r. נתון:  $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$ .

ג. מצאו את גודלי הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$ .



**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+a}}$ ,  $a$  הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות  $a$  את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .



נתון כי לפונקצייה  $f(x)$  אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב. (1) מצאו את  $a$ .

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

נתונות הפונקציות  $g(x) = -f(x+2)$ ,  $h(x) = |f(x)|$ .

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $g(x)$

ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה  $h(x)$ .

(2) האם שיעור ה- $y$  של נקודת המקסימום של הפונקצייה  $g(x)$

גדול משיעור ה- $y$  של נקודת המקסימום של הפונקצייה  $h(x)$ ,

קטן ממנו או שווה לו? נמקו את התשובה.

נתון כי  $\int_{-1}^3 h(x)dx = \int_{-3}^k g(x)dx$ ,  $k > -3$ .

ד. מצאו את  $k$ . הסבירו את התשובה.

7. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x) - 1$ , המוגדרת לכל  $x$ .

א. האם הפונקצייה  $f(x)$  זוגית? נמקו.

ב. הוכיחו כי לכל  $x$  מתקיים:  $-2 \leq f(x) \leq 0$ .

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם הצירים

בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$  בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

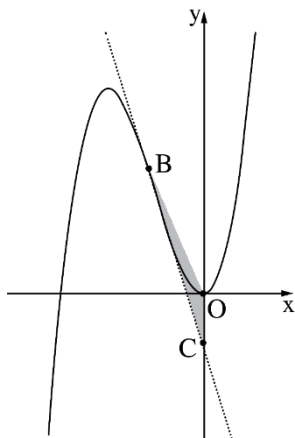
נתונה הפונקצייה  $g(x) = f(2x)$ , המוגדרת לכל  $x$ .

ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה  $g(x)$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,

וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (g'(x) - f'(x)) dx = S$ .

הביעו באמצעות  $S$  את  $\int_{-\frac{\pi}{8}}^0 (g'(x) - f'(x)) dx$ . הסבירו את התשובה.



8. נתונה הפונקצייה  $f(x) = x^3 + 4x^2$ , המוגדרת לכל  $x$ .

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה  $f(x)$

ברביע השני (ראו סרטוט).

מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקצייה  $f(x)$ .

המשיק חותך את ציר ה-y בנקודה C.

נסמן ב-t את שיעור ה-x של הנקודה B.

א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק

לגרף הפונקצייה  $f(x)$  בנקודה B.

ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה-x.

ב. מהו תחום הערכים של t?

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC.

תשובות למבחן בגרות מספר 16 – קיץ תשפ"ב, מועד ב, 2022:

1. א. הוכחה. ב. (1) הוכחה. (2)  $20\pi$ . ג. (1)  $x < -5$ ,  $x > 5$ . (2) 20.  
 ד. (1) גרף ב. (2) גרף ה.

2. א. הוכחה. ב.  $q_1 = -3$ ,  $q_2 = 3$ . ג. (1) הסדרה עולה. (2)  $k = 4$ .  
 ד. הוכחה. ה.  $S_C = -\frac{3}{20}$ .

3. א.  $\frac{3}{11}$ . ב.  $\frac{216}{1331}$ . ג. (1)  $1 - 12p$ . (2) הוכחה. ד.  $\frac{1}{20}$ .  
 ה. המאורעות תלויים זה בזה.

4. א. הוכחה. ב.  $\frac{1}{2}$ . ג.  $S_{\Delta BFC} = 4S$ ,  $S_{\Delta DFC} = 2S$ . ד.  $\sqrt{1.5}$ . ה.  $\sqrt{6a}$  (1).  $\sqrt{3a}$  (2).

5. א. (1)  $AO = \frac{R}{\cos \alpha}$ . (2)  $AB = R \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1 - \frac{2 \cos \beta}{\cos \alpha}}$ . ב. הוכחה.  
 ג.  $\alpha = 58.05^\circ$ ,  $\beta = 47.13^\circ$ .

6. א.  $x > -a$ . ב. (1)  $a = 3$ . (2)  $(0, -3\sqrt{3})$ ,  $(3, 0)$ .

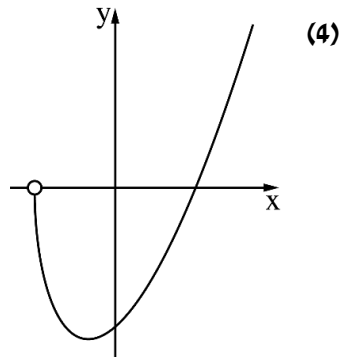
(3)  $(-1, -4\sqrt{2})$  מינימום.

ג. (1) תחום ההגדרה של  $g(x)$ :  $x > -5$

תחום ההגדרה של  $h(x)$ :  $x > -3$

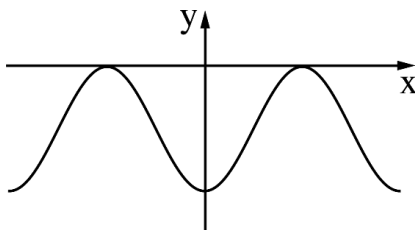
(2) שווה לו.

ד.  $k = 1$ .



7. א. כן. ב. הוכחה. ג.  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ,  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ,  $(0, -2)$ .

ד.



ה.  $\left(-\frac{\pi}{2}, -2\right)$  מינימום,  $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$  מקסימום,  $(0, -2)$  מינימום,

$\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$  מקסימום,  $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$  מינימום. ו. S.

8. א.  $y = (3t^2 + 8t)x - 2t^3 - 4t^2$ . ב.  $-2 < t < 0$ . ג.  $S_{\Delta OBC} = 1\frac{11}{16}$ .





# מבחן בגרות מספר 17

## חורף תשפ"ג, 2023

### פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. ידוע כל לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \dots + (3n-2)(5n-3) = n(5n^2 - 2n - 1)$$

(1) חשבו את הערך של הביטוי:  $7 \cdot 12 + 10 \cdot 17 + \dots + 58 \cdot 97$

ידוע כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \dots + (3n-2)(5n-3) + (3n+1)(5n+2) = (n+1)(5n^2 + 8n + C)$$

(2) מצאו את הערך של  $C$ .



ב. הנקודה  $A$  נמצאת על מעגל שמרכזו  $O$ .

מעבירים משיק למעגל בנקודה  $A$ ,

והוא יוצר זווית של  $\alpha$  מעלות

עם המיתר  $AB$  (ראו סרטוט).

(1) הביעו באמצעות  $\alpha$

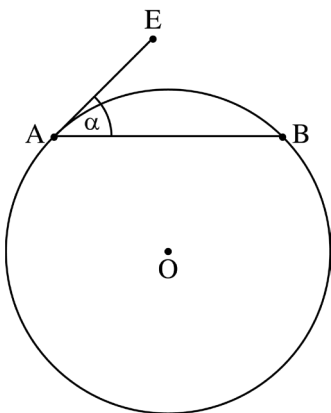
את הזווית  $AOB$ .

(2) הביעו באמצעות  $\alpha$

את היחס בין אורך

הקשת הקטנה  $AB$

ובין היקף המעגל.



ג. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x}$  המוגדרת לכל  $x$  השונה מ-0.



(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה  $f(x)$  המאונכות לצירים.

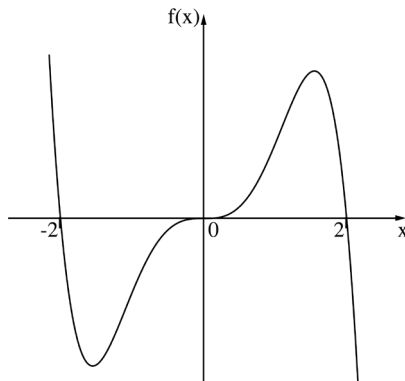
(2) נתונה הפונקצייה  $g(x) = k \cdot f(x+3)$ ,  $k > 0$  הוא פרמטר.

מצאו את הערך של  $k$  שעבורו המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של הפונקצייה  $g(x)$  הוא 10. נמקו את תשובתכם.

ד. היא פונקצייה אי-זוגית המוגדרת לכל  $x$ .



הגרף שלפניכם מתאר את הפונקצייה  $f(x)$ .



נתונה הפונקצייה  $g(t)$  המוגדרת בתחום  $-2 \leq t \leq 2$

$$\text{ומקיימת } g(t) = \int_{-2}^t f(x) dx$$

(1) קבעו באיזה תחום הפונקצייה  $g(t)$  יורדת.

(2) האם קיימים ערכים של  $t$  (בתחום  $-2 \leq t \leq 2$ )

שעבורם הפונקצייה  $g(t)$  חיובית? נמקו את תשובתכם.

(3) האם לפונקצייה  $g(t)$  יש נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.

## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. נתונה סדרה הנדסית אין סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא  $a_n$  ומנתה היא  $q$ .

בונים סדרה חדשה B שהאיבר הכללי שלה הוא  $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$ .



א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.

ב. בנוגע לכל אחד מן ההיגדים (1)–(2) שלפניכם קבעו אם הוא נכון או לא נכון, ונמקו את קביעתכם.

(1) אם הסדרה A לא מתכנסת – בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

(2) אם הסדרה A יורדת – בהכרח היא גם מתכנסת.

נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B

לסכום של כל איברי הסדרה A הוא  $\frac{3}{5}$ .

ג. מצאו את  $q$ .

נתון:  $n$  הוא מספר טבעי המקיים  $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{2059}{729}$

ד. מצאו את  $n$ .

3. בחנות פירות יש ארגזים ובתוכם פירות.

בארגז א' יש a פירות: 3 תפוחים והשאר אגסים.



בארגז ב' יש b פירות: 5 תפוחים והשאר אגסים.

מוציאים באקראי פרי אחד מארגז א'. אם יצא תפוח – מעבירים אותו לארגז ב',  
ואם יצא אגס – מחזירים אותו לארגז א'.

לאחר מכן מוציאים באקראי פרי אחד מארגז ב'.

א. הביעו באמצעות a ו-b את ההסתברות שיצאו 2 תפוחים.

נתון: ההסתברות להוציא באופן המתואר 2 תפוחים היא  $\frac{9}{65}$ .

ההסתברות להוציא באופן המתואר תפוח אחד ואחר כך אגס היא  $\frac{21}{130}$ .

ב. מצאו את a ואת b.

ג. חשבו את ההסתברות שמארגז ב' יצא אגס, אם ידוע כי מארגז א' יצא תפוח.

מעבירים את כל הפירות משני הארגזים לארגז שהיה ריק,  
ומוציאים ממנו באקראי פרי 6 פעמים, עם החזרה.

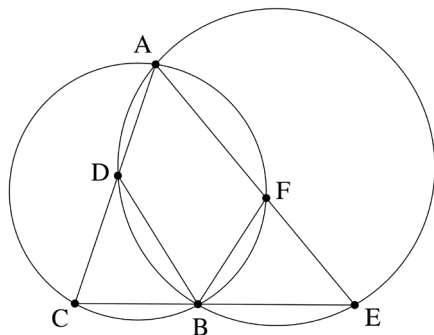
ד. מצאו את ההסתברות שב-4 מן הפעמים בדיוק יצא תפוח  
אן שבכל 6 הפעמים יצא אגס.

ה. ידוע שב-4 מן הפעמים בדיוק יצא תפוח.

מצאו את ההסתברות שהתפוחים יצאו ברציפות, בזה אחר זה.

## פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B (ראו סרטוט).



המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה D.

המיתר AE במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.

הקטע CE עובר דרך הנקודה B.

א. הוכיחו כי  $\triangle ACE \sim \triangle ABCD$ .

נתון:  $DC = FE$ .

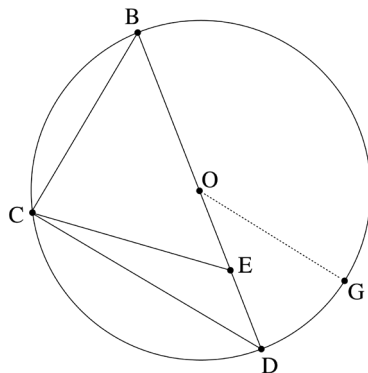
ב. הוכיחו כי  $\triangle BFE \cong \triangle ABCD$ .

ג. (1) הוכיחו כי  $AC \cdot BE = AE \cdot BC$ .

(2) הוכיחו כי AB הוא חוצה זווית CAE.

ד. הוכיחו כי  $\angle DEC = \angle FCE$ .

5. משולש BCD חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.



הנקודות O ו-E נמצאות על הצלע BD כך שמתקיים  $OE = ED$  (ראו סרטוט).

נסמן:  $CD = m$ ,  $\angle CDB = \alpha$ .

א. הביעו את  $\cos \alpha$  באמצעות m ו-R.

ב. הוכיחו כי  $CE = \frac{1}{2} \sqrt{2m^2 + R^2}$ .

נתון:  $BC = EC$ .

ג. חשבו את  $\alpha$ .

מעבירים רדיוס OG המקביל לצלע CD,

כמתואר בסרטוט.

ד. חשבו את גודל הזווית OEG.

**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקצייה:  $f(x) = x^n \cdot (x+1)^2$  .  $n > 1$  הוא מספר טבעי.

הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .



א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם הצירים.

ב. מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקצייה  $f(x)$

(אם יש כאלה). הבחינו בין  $n$  זוגי ובין  $n$  אי-זוגי.

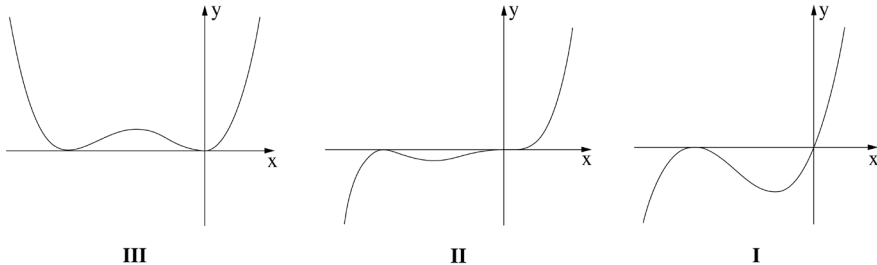
ג. מצאו את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ ,

וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות  $n$ , אם יש צורך.

הבחינו בין  $n$  זוגי ובין  $n$  אי-זוגי.

לפניכם שלושה גרפים I–III. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה  $f(x)$

עבור  $n$  זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקצייה  $f(x)$  עבור  $n > 1$  ואי-זוגי.



ד. קבעו איזה מבין הגרפים מתאר את הפונקצייה  $f(x)$  עבור  $n$  זוגי, ואיזה גרף

מתאר את הפונקצייה  $f(x)$  עבור  $n > 1$  ואי-זוגי. נמקו את קביעותיכם.

נתונה הפונקצייה  $g(x) = a \cdot f(x-2)$ ,  $a$  הוא פרמטר חיובי.

נסמן ב- $T$  את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה  $g(x)$  ובין ציר ה- $x$ .

ה. הביעו באמצעות  $a$  ו- $T$  את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה  $f(x)$

ובין ציר ה- $x$ . נמקו את תשובתכם

7. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos^2(x) - 1}$  בתחום  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ .



- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .  
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה  $f(x)$ .  
 המאונכות לציר ה- $x$ .  
 (3) האם הפונקצייה  $f(x)$  זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית?  
 הוכיחו את תשובתכם.
- ב. ענו על התת סעיפים (1)–(2) שלפניכם בעבור התחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .  
 (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם הצירים  
 (אם יש כאלה).  
 (2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.
- ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$  (בתחום  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ).
- ד. הוכיחו כי לפונקצייה  $f(x)$  אין נקודות פיתול.
- ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  ובין ציר ה- $x$ , בתחום  $1.7 \leq x \leq 2$ .

8. לפניכם שלוש פונקציות שלכל אחת מהן שני ערכי  $x$  שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x+1)(x+2)}, \quad h(x) = \frac{x^3}{x(x+2)}, \quad k(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x+2)}$$



ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקצייה מקיימת את כל התכונות האלה. נמקו את קביעתכם.

ענו על סעיפים ב-ד עבוד הפונקציה שקבעתם בסעיף א.

ב. (1) מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ואת המשוואה

של האסימפטוטה האנכית של הפונקצייה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה עם הצירים.

נתון כי לפונקצייה זו אין נקודות קיצון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה.

נסמן נקודה  $A$  על גרף הפונקצייה, שעבורה  $x = t$ ,  $-1 < t < 1$ .

מן הנקודה  $A$  מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה- $x$ ,

והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקצייה,

כך שנוצר מלבן על ידי שני הישרים,

על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה- $x$ .

ד. מצאו את ערכו של  $t$  שבעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי.

תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.



תשובות למבחן בגרות מספר 17 – חורף תשפ"ג, 2023:

1. א. (1) 39,150 . ב. (2)  $C = 2$  . ג. (1)  $2\alpha$  . ד. (2)  $\frac{\alpha}{180}$  .

ג. (1)  $x = 0$  ,  $y = -2$  ,  $y = 0$  . ב. (2)  $k = 2.5$  .  
 $x \rightarrow -\infty$        $x \rightarrow \infty$

ד. (1)  $-2 < t < 0$  . ב. (2) לא. נימוק. ג. (3) כן. נימוק.

2. א. יש להוכיח. ב. (1) נכון (יש לנמק). ג. (2) לא נכון (יש לנמק). ד. ג.  $q = \frac{2}{3}$  .

ד.  $n = 7$  .

3. א.  $\frac{18}{a(b+1)}$  . ב.  $b = 12$  ,  $a = 10$  . ג.  $\frac{7}{13}$  . ד.  $\sim 0.173$  . ה.  $\frac{1}{5}$  .

4. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. (1) הוכחה. ד. (2) הוכחה. ה. הוכחה.

5. א.  $\cos \alpha = \frac{m}{2R}$  . ב. יש להוכיח. ג.  $\alpha = 37.76^\circ$  . ד.  $\sphericalangle OEG = 115.38^\circ$  .

6. א.  $(0,0)$  ,  $(-1,0)$  .

ב. עבור  $n$  זוגי: תחום חיוביות:  $0 < x$  ,  $-1 < x < 0$  ,  $x < -1$  (תחום שליליות: אין)

עבור  $n$  אי-זוגי: תחום חיוביות:  $0 < x$       תחום שליליות:  $-1 < x < 0$  ,  $x < -1$  .

ג. עבור  $n$  זוגי: מינימום:  $x = -1$  ,  $x = 0$       מקסימום:  $x = \frac{n}{n+2}$

עבור  $n$  אי-זוגי: מקסימום:  $x = -1$       מינימום:  $x = -\frac{n}{n+2}$  .

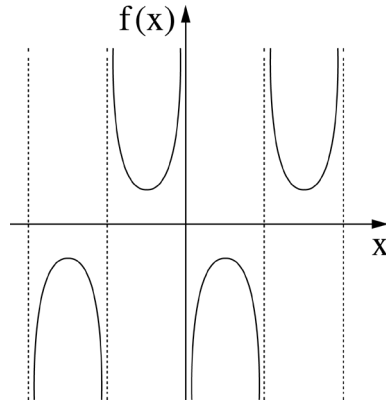
ד. עבור  $n$  זוגי: גרף III      עבור  $n > 1$  אי-זוגי: גרף II . ה.  $\frac{T}{a}$  .

7. א. (1)  $-2\pi < x < 2\pi$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \neq \pm\pi$

(2)  $x = 0$ ,  $x = \pi$ ,  $x = 2\pi$ ,  $x = -2\pi$ ,  $x = -\pi$ . (3) אי-זוגית (יש להוכיח).

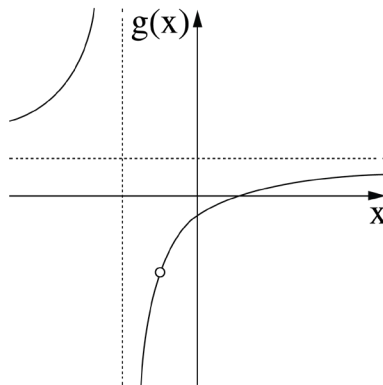
ב. (1) אין נקודות חיתוך עם הצירים. (2) מקסימום:  $(\frac{\pi}{2}, -2)$  מינימום:  $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ .

ג. ד. יש להוכיח. ה.  $\sim 0.18$ .



8. א.  $g(x)$ . ב. (1)  $x = -2$ ,  $y = 1$ . (2)  $(0, -0.5)$ ,  $(1, 0)$ .

ג. ד.  $t = -2 + \sqrt{3}$ .





# מבחן בגרות מספר 18

## קיץ תשפ"ג, מועד א, 2023

### פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. נתונות שתי סדרות המוגדרות לכל  $n$  טבעי:  $b_n = 2^n, a_n = 2n - 1$ .

$$T_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

(1) הוכיחו כי:

$$T_k = (2k - 3) \cdot 2^{k+1} \quad \text{אם בעבור } k \text{ טבעי כלשהו מתקיים:}$$

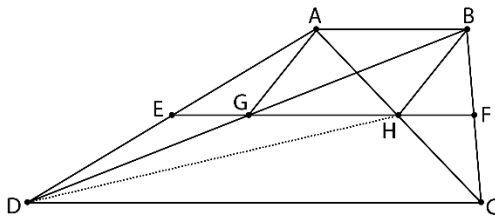
$$T_{k+1} = (2k - 1) \cdot 2^{k+2} \quad \text{אז מתקיים:}$$

לפניכם טענה: לכל  $n$  טבעי מתקיים:  $T_n = (2n - 3) \cdot 2^{n+1}$ .

(2) הסבירו מדוע טענה זו אינה נכונה.



ב. בטרפז  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) הקטע  $EF$  הוא קטע אמצעים.



הקטע  $EF$  חותך את

האלכסונים  $AC$  ו- $BD$

של הטרפז

בנקודות  $H$  ו- $G$  בהתאמה.

נתון כי המרובע  $ABHG$

הוא מקבילית.

(1) הוכיחו:  $GH = 2EG$ .

המשך הישר  $AG$  חותך את הקטע  $DH$  בנקודה  $M$ .

(2) הוכיחו: הקטע  $AM$  חוצה את הקטע  $DH$ .





לפניכם הגרפים III-I המייצגים את הפונקצייה  $f(x)$ ,

את פונקציית הנגזרת הראשונה  $f'(x)$ ,

ואת פונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$ .

הפונקציות מוגדרות עבור  $0 \leq x \leq 3$ .

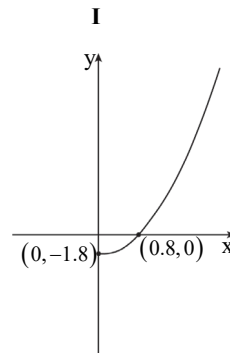
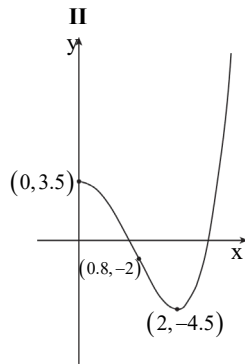
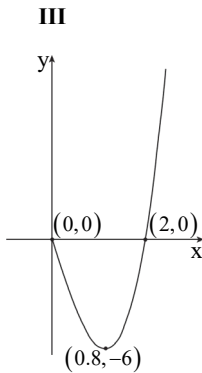
(1) התאימו כל אחד מן הגרפים III-I לכל אחת מן

הפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$  ו- $f''(x)$ . נמקו.

ענו על התת-סעיפים (2)-(3) על פי הנתונים המופיעים בגרפים III-I.

(2) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה  $f(x)$  בנקודת הפיתול שלה.

(3) מצאו את הערך של האינטגרל  $\int_0^{0.8} f''(x) dx$ .





4. לפניכם הגרף של הפונקצייה  $f(x)$ .

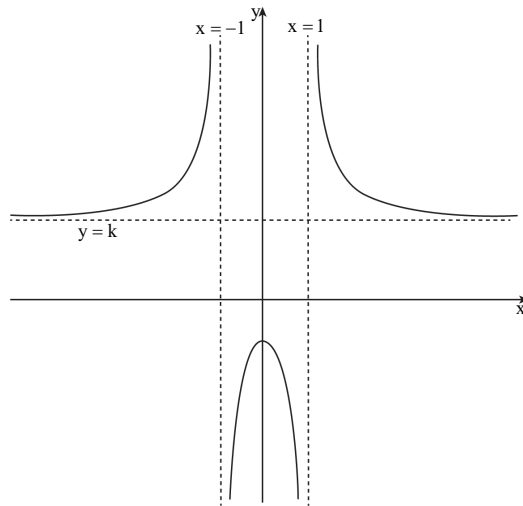
הפונקצייה  $f(x)$  מוגדרת עבור  $x \neq -1, x \neq 1$ .

משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה  $f(x)$

הן:  $x = -1, x = 1, y = k, k > 1$ .

שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם ציר ה- $y$  הם  $(0, -a)$ ,

$a$  הוא מספר חיובי.



(1) מצאו עבור אילו ערכים של  $a$  יש לגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $\frac{1}{f(x)}$

שתי נקודות חיתוך. נמקו.

(2) נתון כי המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של

הפונקציות  $f(x)$  ו- $\frac{1}{f(x)}$  הוא 1.5.

מהו הערך של  $k$ ? נמקו.

## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. נתונות שתי סדרות הנדסיות אין-סופיות מתכנסות, A ו-B,

שכל איבריהן שונים מ-0.



האיבר הכללי של הסדרה A הוא  $a_n$  ומנתה היא  $q_A$ .

האיבר הכללי של הסדרה B הוא  $b_n$  ומנתה היא  $q_B$ .

משתי הסדרות ההנדסיות A ו-B בונים סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת

חדשה, שאיבריה הם:  $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$

כל שלוש הסדרות, הסדרה A והסדרה B והסדרה החדשה אינן קבועות.

א. הביעו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות  $q_A$  ו- $q_B$ .

הסדרה A אינה עולה ואינה יורדת, והסדרה B עולה.

ב. בנוגע לכל אחד משני ההיגדים (1)–(2) שלפניכם, קבעו אם הוא נכון

או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

(1) מנת הסדרה החדשה היא חיובית.

(2) כל איברי הסדרה B הם שליליים.

המספרים  $c_1, c_2, c_3$  הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית.

נתון כי  $c_2$  שווה ל- $-c_1$ , ומתקיים גם:  $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{45}$ .

ג. מצאו את  $c_1$ .

נתון כי המנה של הסדרה A שווה ל- $c_1$ ,

ומתקיים גם:  $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$

ד. מצאו את הערך של  $q_B$ .

3. במכללה גדולה, הועלתה הצעה לקצר את הפסקת הצוהריים כדי לסיים מוקדם יותר את יום הלימודים.



בעקבות זאת ערכו משאל ובו השתתפו כל תלמידי שנה א' וכל תלמידי שנה ב'. על פי תוצאות המשאל התברר כי 80% מן המשתתפים שבעד ההצעה הם תלמידי שנה א'.

עוד התברר כי מספר תלמידי שנה א' שבעד ההצעה שווה למספר תלמידי שנה ב' שנגד ההצעה.

מבין המשתתפים במשאל לא היו נמנעים.

נסמן ב-  $p$  את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שבעד ההצעה מבין כל התלמידים שהשתתפו במשאל.

א. בחרו באקראי אחד מתלמידי שנה ב'. מהי ההסתברות שהוא נגד ההצעה?

ידוע כי ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה א' הוא בעד ההצעה, גדולה ב-  $\frac{13}{35}$  מן ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה ב' הוא בעד ההצעה.

ב. חשבו את הערך של  $p$ .

ג. בחרו באקראי אחד מן המשתתפים במשאל.

חשבו את ההסתברות שמתקיים לפחות אחד משני התנאים האלה:

I. המשתתף שנבחר הוא תלמיד שנה ב'.

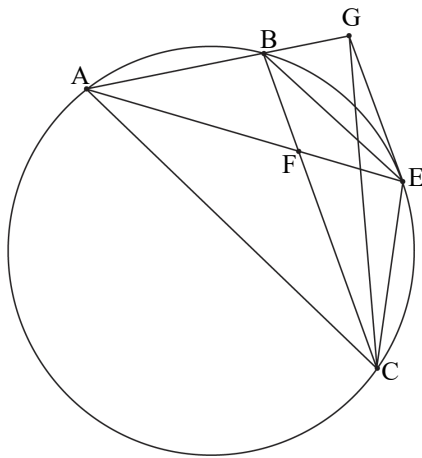
II. המשתתף שנבחר בעד ההצעה.

ד. בחרו באקראי 5 מן המשתתפים במשאל.

ידוע כי כל החמישה שנבחרו הם תלמידי שנה ב'.

מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם בעד ההצעה וגם לפחות שניים מהם נגד ההצעה?

פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. הנקודות A, B ו-C נמצאות על מעגל.

נקודה E היא אמצע הקשת BC, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

נקודה E מעבירים משיק למעגל. המשיק חותך את המשיך המיתר AB בנקודה G.

המיתרים AE ו-BC נחתכים בנקודה F.

א. הוכיחו:  $\triangle ACE \sim \triangle AEG$ .

נתון:  $AG = 6$ ,  $AE = 3\sqrt{6}$ .

ב. חשבו את אורך המיתר AC.

ג. הוכיחו:  $BC \parallel GE$ .

נתון: שטח המשולש ABF גדול פי 2 משטח המשולש BFE.

ד. חשבו את אורך המיתר AB.

ה. מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC?

נמקו את תשובתכם.



5. דלתון ABCD חסום במעגל שרדיוסו R. המיתר AC הוא האלכסון הראשי.

של הדלתון. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC (ראו סרטוט).

נסמן:  $\angle CAB = \alpha$ .

א. (1) מצאו את זוויות המשולש AOC

(הביעו באמצעות  $\alpha$  במידת הצורך).

(2) הביעו את אורך הקטע AO

באמצעות  $\alpha$  ו-R.

נתון כי אורך הקטע AO הוא  $R\sqrt{2}$ .

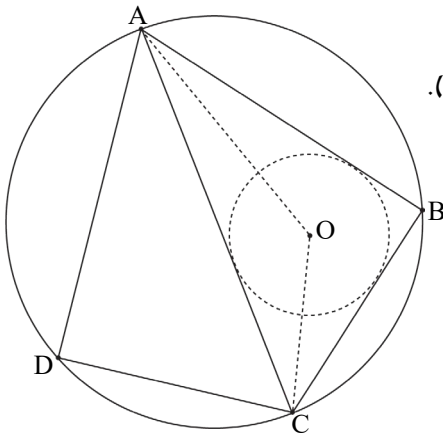
ב. מצאו את גודל הזווית  $\alpha$ .

נתון כי שטח הדלתון הוא  $25\sqrt{3}$ .

ג. מצאו את R.

ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החוסם

את הדלתון לבין מרכז המעגל החסום במשולש ABC.





**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{2a-x^2}{x}$ , המוגדרת עבור  $x \neq 0$ .  $a$  הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו את תשובותיכם באמצעות  $a$ , אם יש צורך.



(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה  $f(x)$  המאונכות

לצירים, אם יש כאלה.

(2) הראו שהפונקצייה  $f(x)$  היא פונקצייה אי-זוגית.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים,

אם יש כאלה.

(4) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה  $f(x)$ ,

אם יש כאלה.

(5) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה ( $\cup$ ) ואת תחום הקעירות כלפי

מטה ( $\cap$ ) של הפונקצייה  $f(x)$ .

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

נתונה גם הפונקצייה  $g(x) = |f(x)| - b$ ,  $b$  הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה  $g(x)$  מוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה  $f(x)$ .

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $g(x)$ .

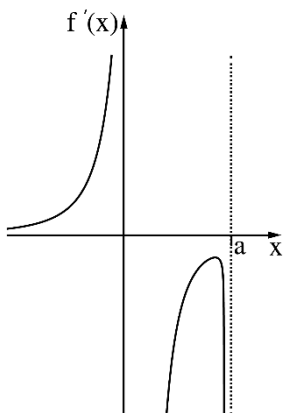
ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקצייה  $g(x)$  היא:  $(2, -3)$ .

ד. מצאו את הערכים של  $a$  ו- $b$ .

נתונה גם הפונקצייה  $s(x) = \int_1^x g(t) dt$ , המוגדרת בתחום  $1 < x$ .

ה. מהו סוג נקודת הקיצון של  $s(x)$ ? נמקו את תשובתכם.

7. נתונה הפונקצייה  $f(x)$  המוגדרת בתחום  $x \leq a, x \neq 0$ ,



$a$  הוא פרמטר חיובי.

בסרטוט שלפניכם מתואר

גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

פונקציית הנגזרת  $f'(x)$

מוגדרת בתחום  $x < a, x \neq 0$ .

לפונקציית הנגזרת  $f'(x)$

יש שלוש אסימפטוטות

המאונכות לצירים שמשוואותיהן:

$$x = 0, x = a, y = 0$$

בתחום  $x < 0$  פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  עולה.

הישר  $x = 0$  הוא אסימפטוטה גם לגרף הפונקצייה  $f(x)$ .  $f(a) = 0$ .

א. (1) מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקצייה  $f(x)$

(הביעו את תשובתכם באמצעות  $a$ , אם יש צורך). נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה  $f(x)$ ? נמקו.

נתון כי הישר  $y = 0$  הוא אסימפטוטה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

ב. סרטוטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה  $f(x)$ , בהתאם לתשובתכם

בתת-סעיף א(2).

נתון כי אחד מן הביטויים IV-I מייצג את הפונקצייה  $f(x)$ .

$$\text{I. } \frac{\sqrt{a-x}}{x^2} \quad \text{II. } \frac{\sqrt{x-a}}{x^2} \quad \text{III. } \frac{\sqrt{a-x}}{x} \quad \text{IV. } \frac{\sqrt{x-a}}{x}$$

ג. איזה מן הביטויים IV-I מייצג את הפונקצייה  $f(x)$ ? נמקו.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = (-2)$ , הוא  $\frac{7}{16}$ .

ד. מצאו את הערך של  $a$ .

ה. הציבו  $a = 2$  וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה  $(f(x))^2$ ,

על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישר  $x = 1$ .

8. נתון מעוין ABCD. נקודה E היא אמצע הצלע BC.

נסמן  $\angle ECD = x$ .



נתון: שטח המשולש ECD הוא 18.

א. הביעו באמצעות  $x$  את אורך צלע המעוין.

ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE.

תשובות למבחן בגרות מספר 18 – קיץ תשפ"ג, מועד א, 2023:

1. א. (1) הוכחה. (2) הסבר. ב. (1) הוכחה. (2) הוכחה.  
 ג. (1) גרף I- $f''(x)$ , גרף II- $f(x)$ , גרף III- $f'(x)$ . (2)  $y = -6x + 2.8$ . (3) -6.  
 ד. (1)  $0 < a < 1$ . (2)  $k = 2$ .

2. א.  $\frac{q_A}{q_B}$ . ב. (1) לא נכון. (2) נכון. ג.  $-\frac{1}{15}$ . ד.  $\frac{1}{5}$ .

3. א. 0.8. ב.  $p = \frac{5}{12}$ . ג.  $\frac{3}{4}$ . ד.  $\frac{32}{125} = 0.256$ .

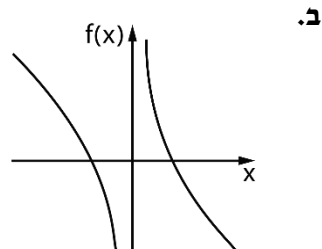
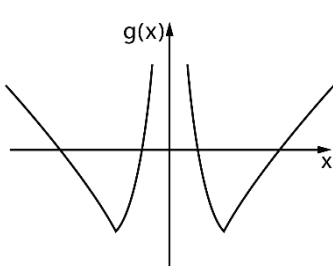
4. א. הוכחה. ב.  $AC = 9$ . ג. הוכחה. ד.  $AB = 4$ . ה.  $\frac{4}{9}$ .

5. א. (1)  $135^\circ$ ,  $\frac{1}{2}\alpha$ ,  $45^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ . (2)  $AO = 2\sqrt{2}R \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$ . ב.  $\alpha = 30^\circ$ .  
 ג.  $R = 5$ . ד. 2.59.

6. א. (1)  $x = 0$ . (2) להראות. (3)  $(-\sqrt{2a}, 0)$ ,  $(\sqrt{2a}, 0)$ .

(4) תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה:  $x < 0$  או  $x > 0$ .

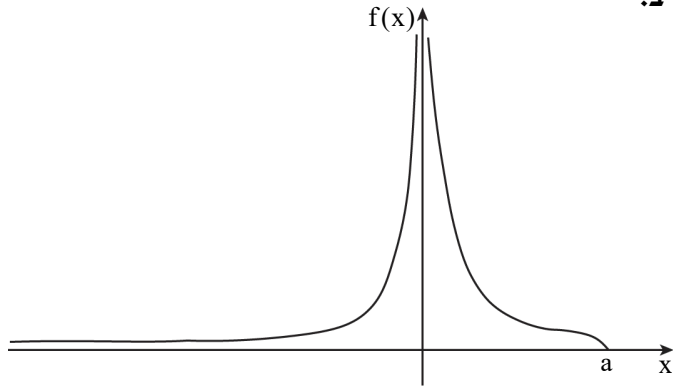
(5) קעירות כלפי מעלה ( $\cup$ ):  $x > 0$ ; קעירות כלפי מטה ( $\cap$ ):  $x < 0$ .



ד.  $a = 2$ ,  $b = 3$ . ה. מינימום.

7. א. (1) תחום עלייה:  $x < 0$ , תחום ירידה:  $0 < x < a$ . (2) נקודת פיתול אחת.

ב.



ג. I. ז.  $a = 2$ . ה.  $\frac{5}{24}$ .

8. א.  $\sqrt{\frac{72}{\sin x}}$ . ב.  $\sqrt{54}$ .



## מבחן בגרות מספר 19

קיץ תשפ"ג, מועד מיוחד, 2023

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. בסרטוט שלפניכם



מקבילית ABCD.

הנקודות E ו-F נמצאות

על המשכי הצלע AB,

כמתואר בסרטוט.

הקטע EC חותך את

הצלע AD בנקודה G.

הקטע FD חותך את הצלע BC

בנקודה H.

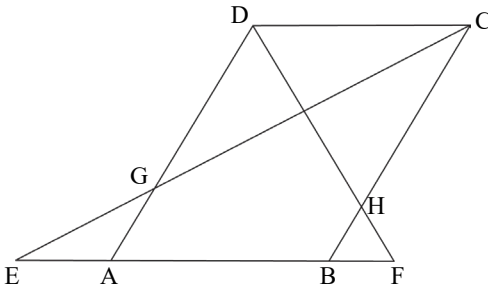
נתון:  $GE = 5$ ,  $HF = 4$ .

(1) מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש HBF

ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש GEA. נמקו את תשובתכם.

נתון: המרובע ABHD הוא בר-חסימה במעגל,  $BH = FH$ .

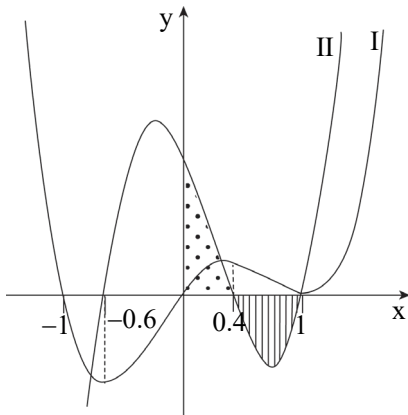
(2) הוכיחו כי המשולש HBF הוא שווה צלעות.



- ב. ביישוב מסוים ההסתברות לבחור באקראי גבר היא 0.2, וההסתברות לבחור באקראי אישה היא 0.8. בוחרים באקראי 4 אנשים מיישוב זה. לפניכם שני ביטויים:

$$\text{ביטוי 1: } 1 - 0.2^4 - 0.8^4, \quad \text{ביטוי 2: } \binom{4}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8 + 0.2^4$$

- קבעו איזו מבין ההסתברויות III-I שלפניכם אפשר לחשב על ידי ביטוי 1 ואיזו מהן אפשר לחשב על ידי ביטוי 2.
- I. ההסתברות לבחור באקראי יותר גברים מנשים.
  - II. ההסתברות לבחור באקראי יותר נשים מגברים.
  - III. ההסתברות לבחור באקראי לפחות גבר אחד ולפחות אישה אחת.



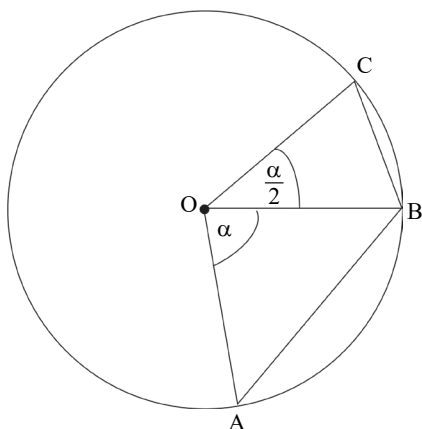
- ג.  $f(x)$  היא פונקצייה. בסרטוט שלפניכם מוצגים שני גרפים: גרף I וגרף II. אחד הגרפים הוא של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ , והגרף האחר הוא של פונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$ .
- (1) איזה גרף הוא של  $f'(x)$ , ואיזה גרף הוא של  $f''(x)$ ? נמקו.

- (2) הוכיחו שהשטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי ציר ה- $x$  ברביע הרביעי (השטח המקווקו בסרטוט) שווה לשטח המוגבל על ידי גרף II, על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי ציר ה- $y$  ברביע הראשון (השטח המנוקד בסרטוט).



4. במעגל שמרכזו  $O$  בונים סדרה אין-סופית של משולשים שווי שוקיים. זווית הראש של המשולשים הן זוויות מרכזיות במעגל, ושוקי המשולשים הם רדיוסים במעגל. זווית הראש של המשולש הראשון ( $\triangle AOB$ ) היא  $\alpha$ . זווית הראש של המשולש השני ( $\triangle BOC$ ) היא  $\frac{\alpha}{2}$ , כמתואר בסרטוט.

ממשיכים לבנות משולשים שווי שוקיים כך שזווית הראש של כל משולש נוסף בסדרה קטנה פי 2 מזווית הראש של המשולש לפניו. נתון: סכום כל זוויות הראש של כל המשולשים בסדרה הוא  $240^\circ$ .



- (1) מצאו את  $\alpha$ .
- (2) האם שטחי כל המשולשים האלה הם סדרה הנדסית? נמקו את תשובתכם.



## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. נתונה סדרה חשבונית A ובה  $2n$  איברים ( $n$  הוא מספר טבעי).

$d$  הוא הפרש הסדרה ( $d \neq 0$ ).



מגדירים סדרה נוספת B באופן הזה:  $b_m = \frac{a_m + a_{m+1}}{2}$ .

בסדרה B יש  $2n-1$  איברים.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה חשבונית,

והביעו באמצעות  $d$  את ההפרש שלה.

נסמן ב- $S_A$  את סכום האיברים בסדרה A.

נסמן ב- $S_B$  את סכום האיברים בסדרה B.

ב. הוכיחו:  $\frac{S_A}{2n} = \frac{S_B}{2n-1}$ .

נתון:  $S_A = 220 + S_B$ ,  $S_A = \frac{66}{65} \cdot S_B$ .

ג. (1) מצאו את  $n$ .

(2) מצאו את סכום שני האיברים האמצעיים בסדרה A.

3. כדי להתקבל ללימודים בפקולטה מסוימת מועמד צריך להיבחן בשני מבחנים.

ההסתברות שמועמד יצליח במבחן הראשון היא  $P > 0.5$ .

אם המועמד הצליח במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני

היא  $P + 0.3$ .

אם המועמד נכשל במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני

היא  $P - 0.1$ .

נתון כי ההסתברות שהמועמד יצליח בדיוק במבחן אחד מבין השניים היא  $\frac{9}{40}$ .

א. מצאו את  $P$ .

כדי להתקבל ללימודים בפקולטה המועמד צריך להצליח בשני המבחנים.

ב. ידוע כי מועמד הצליח לפחות במבחן אחד. מהי ההסתברות שהוא

התקבל לפקולטה?

שלושה מועמדים נבחנו בשני המבחנים.

ג. מהי ההסתברות ששני מועמדים מבין השלושה התקבלו לפקולטה ואחד מהם

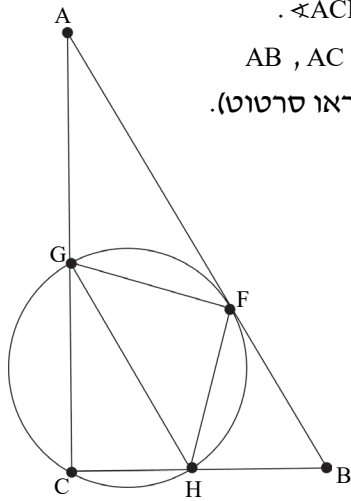
נכשל בשני המבחנים?

$n$  מועמדים נבחנו בשני המבחנים ( $n \geq 2$ ).

ד. הביעו באמצעות  $n$  את ההסתברות שלפחות מועמד אחד התקבל לפקולטה

וגם לפחות מועמד אחד לא התקבל לפקולטה.

## פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. המשולש ABC הוא משולש ישר זווית,  $\angle ACB = 90^\circ$ . הנקודות F, G, H, נמצאות על הצלעות AB, AC, CB בהתאמה, כך שהמרובע GCHF חסום במעגל (ראו סרטוט).

נתון: AB  $\parallel$  GH, F משיק למעגל בנקודה F, AB  $\parallel$  GH.

א. הוכיחו:  $FG = FH$ .

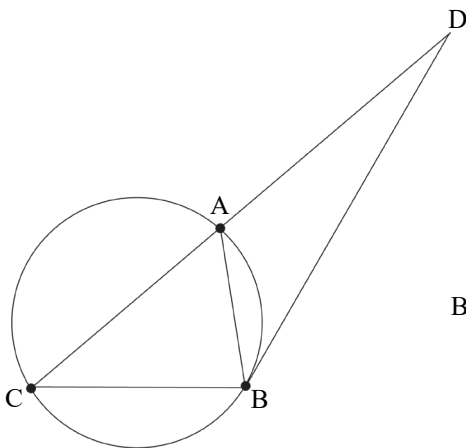
ב. (1) מצאו את גודל הזווית  $\angle ACF$ .

(2) הוכיחו:  $\triangle GFC \sim \triangle FBC$ .

קוטר המעגל היוצא מנקודה F

חותך את הצלע AC בנקודה E.

ג. הוכיחו:  $\angle FEB = \angle FCB$ .



5. המשולש ABC חסום במעגל

שהרדיוס שלו הוא R.

המשיק למעגל בנקודה B

חותך את המשך הצלע CA

בנקודה D, כמתואר בסרטוט.

נסמן:  $\angle ABD = \alpha$ .

נתון:  $\angle DBC = 120^\circ$ .

א. הביעו את אורכי הצלעות AB ו-BC

באמצעות R ו- $\alpha$ , אם יש צורך.

נתון: היחס בין שטח המשולש BDC

ובין שטח המשולש BDA הוא 1.8.

ב. מצאו את  $\alpha$ .

נתון כי רדיוס המעגל החסום במשולש BDA הוא 4.

ג. מצאו את R.

**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \sin(x) \cdot \cos^3(x)$  המוגדרת בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

א. (1) האם הפונקצייה  $f(x)$  היא זוגית אן אי-זוגית? נמקו.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ ,

וקבעו את סוגן.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

נתונה הפונקצייה  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ .

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $g(x)$ .

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה  $g(x)$ .

(3) סרטטו (בקו מקווקו) סקיצה של גרף הפונקצייה  $g(x)$  באותה מערכת

צירים שבה סרטטתם את גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

ענו על סעיף ג בעבור התחום שבו מוגדרות הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ .

ג. מצאו את המרחק המינימלי בין הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ .



7. נתונה הפונקצייה  $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$ .

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$

(אם יש כאלה).

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה  $f(x)$ .

(4) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה ( $\cup$ ) וכלפי מטה ( $\cap$ )

של הפונקצייה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

נתונה הפונקצייה  $h(x) = -f(-x)$ . הפונקציות  $f(x)$  ו- $h(x)$  מוגדרות באותו תחום.

ג. באותה מערכת צירים שבה סרטטתם סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ ,

הוסיפו בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקצייה  $h(x)$ .

נתון:  $a > 4$  הוא פרמטר.

ד. סדרו את הביטויים **I**–**III** שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר

(כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה).

$$\text{I. } \int_a^{a+1} (f(x) - h(x)) dx$$

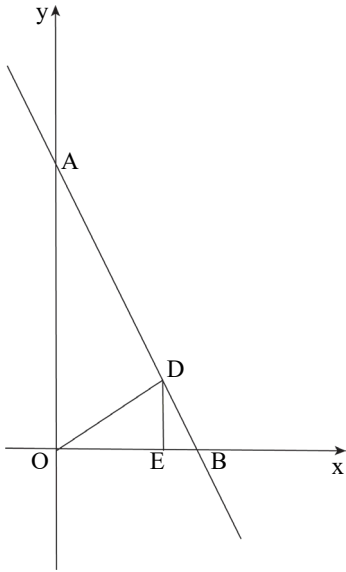
$$\text{II. } \int_{a+1}^{a+2} (f(x) - h(x)) dx$$

$$\text{III. } \int_{-a+1}^{-a+2} (f(x) - h(x)) dx$$

8. ישר ששיפועו 2- חותך את החלק החיובי

של ציר ה-x בנקודה B,

ואת החלק החיובי של ציר ה-y בנקודה A.



הנקודה D נמצאת על הישר AB

ברביע הראשון.

הנקודה E נמצאת על ציר ה-x

כך שהקטע DE מקביל לציר ה-y.

הנקודה O היא ראשית הצירים,

כמתואר בסרטוט.

נסמן את הקטע OE ב-p.

נתון: שטח המשולש OED הוא  $\frac{p}{2}$ .

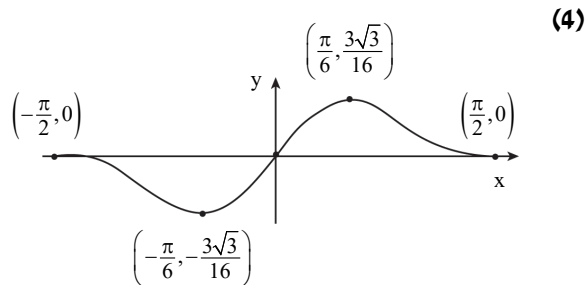
א. הביעו באמצעות p את משוואת הישר AB.

ב. מצאו את הערך של p שבעבורו היחס בין שטח המשולש OED

ובין שטח המשולש ABO הוא מקסימלי.

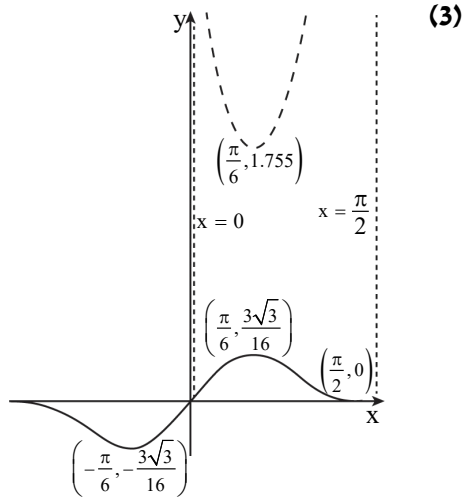
תשובות למבחן בגרות מספר 19 – קיץ תשפ"ג, מועד מיוחד, 2023:

1. א. (1) 4:5 . (2) הוכחה . ב. ביטוי 1: III , ביטוי 2: I .  
 ג. (1) גרף I :  $f'(x)$  , גרף II :  $f''(x)$  . (2) הוכחה .  
 ד. (1)  $\alpha = 120^\circ$  . (2) שטחי כל המשולשים האלו אינם סדרה הנדסית .
2. א. הסדרה B חשבונית, והפרשה d . ב. הוכחה . ג. (1)  $n = 33$  . (2) 440 .
3. א.  $P = 0.65$  . ב.  $\frac{247}{337} \approx 0.733$  . ג. 0.1802 . ד.  $1 - (0.3825^n + 0.6175^n)$  .
4. א. הוכחה . ב. (1)  $\angle ACF = 45^\circ$  . (2) הוכחה . ג. הוכחה .
5. א.  $BC = R\sqrt{3}$  ,  $AB = 2R \sin \alpha$  . ב.  $\alpha = 40.2^\circ$  . ג.  $R = 10.26$  .
6. א. (1) אי-זוגית. (2)  $(0,0)$  ,  $(\frac{\pi}{2},0)$  ,  $(-\frac{\pi}{2},0)$  . (3)  $(\frac{\pi}{2},0)$  מינימום ,  
 מקסימום  $(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{16})$  , מינימום  $(-\frac{\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{16})$  , מקסימום  $(-\frac{\pi}{2},0)$  .



ג. (1)  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  (2)  $(\frac{\pi}{6}, 1.755)$  מינימום .

ג. 1.43 .

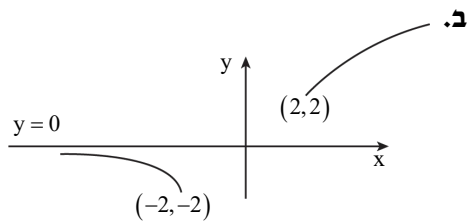
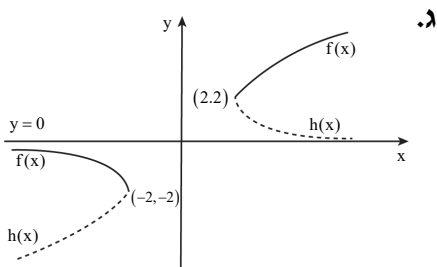


7. א. (1)  $x \geq 2$  או  $x \leq -2$  (2) אין לפונקציה  $f(x)$  נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$  .

(3) תחום עלייה:  $x > 2$  , תחום ירידה:  $x < -2$  .

(4) תחום קעירות כלפי מעלה (∪) : אף  $x$  ,

תחומי קעירות כלפי מטה (∩) :  $x < -2$  או  $x > 2$  .



ד.  $III < I < II$  .

8. א.  $y = -2x + 2p + 1$  . ב.  $p = 0.5$  .





## מבחן בגרות מספר 20

### קיץ תשפ"ג, מועד ב, 2023

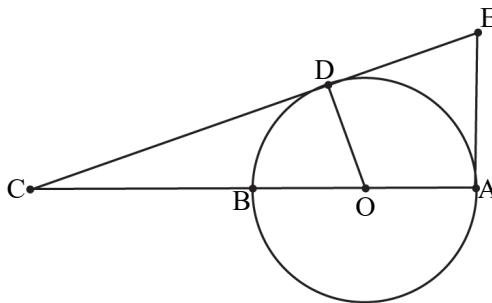
#### פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. בעבור כל  $n$  טבעי הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי מתקיים:  $\frac{A}{2} + \frac{A}{2^2} + \dots + \frac{A}{2^n} = A \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ . הוא פרמטר.



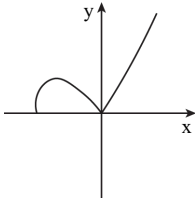
ב. הנקודה B היא אמצע הקטע AC. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוס R. מן הנקודה A מעבירים ישר המשיק למעגל בנקודה D. בנקודה A מעבירים משיק נוסף למעגל. שני המשיקים נחתכים בנקודה E (ראו סרטוט).



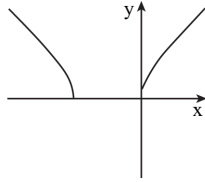
- (1) הוכיחו כי המרובע AODE הוא בר חסימה במעגל.  
(2) הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AODE.



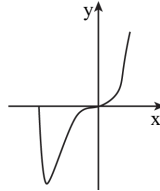
ג. לפניכם שלוש פונקציות והגרפים א-ד. כל אחת מן הפונקציות מתוארת על ידי אחד מן הגרפים  $f(x) = \sqrt{x^2(x+2)}$ ,  $h(x) = \sqrt{x(x+2)}$ ,  $k(x) = x\sqrt{x+2}$ .



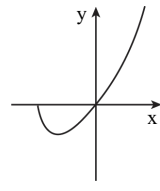
גרף ד



גרף ג



גרף ב



גרף א

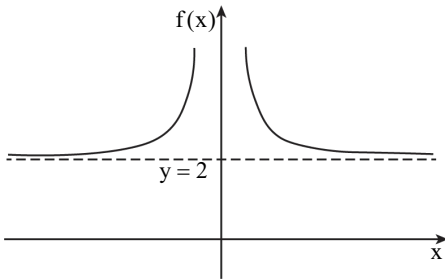
(1) בעבור כל אחת מן הפונקציות, קבעו איזה מן הגרפים מתאר אותה. נמקו את קביעותיכם.

נתונה הפונקצייה  $g(x) = x^n \sqrt{x+2}$ ,  $n$  הוא פרמטר טבעי גדול מ-1.

(2) מצאו עבור אילו ערכים של  $n$ , הגרף הנוטר מתאר את הפונקצייה  $g(x)$ .



ד. לפניכם גרף של הפונקצייה  $f(x)$ ,



המוגדרת לכל  $x \neq 0$ .

הישרים  $y=2$  ו- $x=0$

הם אסימפטוטות של

הפונקצייה  $f(x)$ .

הפונקצייה  $f(x)$  קעורה כלפי

מעלה בכל תחום הגדרתה.

(1) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

(2) רשמו את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$

(אם יש כאלה).

נתון:  $a > 0$  הוא פרמטר.

(3) סדרו את הביטויים (1)–(4) שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר

(כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה).

(1)  $\int_a^{a+1} f(x)dx$ , (2)  $\int_{a+1}^{a+2} f(x)dx$ , (3)  $\int_a^{a+1} f'(x)dx$ , (4) המספר 2.

## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. נתונה סדרה חשבונית  $a_1, a_2, \dots, a_{3n}$  שבה  $3n$  איברים, וההפרש שלה הוא  $d$ .

נסמן ב-  $S_n^*$  את הסכום של  $n$  האיברים האמצעיים של הסדרה.



א. הוכיחו כי  $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$ .

נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של  $n$  האיברים האמצעיים שווה ל-0.

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי מתקיים  $a_1 = 19 \cdot |d|$ .

ג. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

מוחקים כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה:

$a_2, a_5, a_8, \dots, a_{3n-4}$ . סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 36.

ד. מצאו את  $d$ .

3. עיתון יומי המופץ למנויים שגרים בחיפה או בתל אביב בלבד, אמור להישלח אל

ביתם בכל יום עד השעה 6:00.



מערכת העיתון ערכה סקר בקרב המנויים, ושאלה בנוגע ליום מסוים אם הם קיבלו את העיתון בזמן.

כל המנויים השתתפו בסקר וכל אחד מהם ענה כן או לא.

מתוצאות הסקר עולה כי ההסתברות לבחור באקראי מנוי שקיבל את העיתון

בזמן מבין המנויים שגרים בחיפה היא  $\frac{3}{4}$ , וההסתברות לבחור באקראי מנוי שגר

בחיפה מבין המנויים שקיבלו את העיתון בזמן היא  $\frac{5}{9}$ .

נסמן ב- $p$  את ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין כל המנויים גר בחיפה.

בוחרים באקראי אחד מן המנויים.

א. הביעו באמצעות  $p$  את ההסתברות שהמנוי שנבחר גר בתל אביב וקיבל את

העיתון בזמן.

נתון כי מספר המנויים שגרים בתל אביב ולא קיבלו את העיתון בזמן גדול פי 1.5

ממספר המנויים שגרים בתל אביב וקיבלו את העיתון בזמן.

ב. כמה אחוזים מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן?

מבין המנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן, בוחרים באקראי שני מנויים.

ג. מהי ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל אביב והשני שנבחר גר בחיפה?

באותו היום התקשרו למערכת העיתון 6 מנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מהם גרים בחיפה?

## פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. מנקודה B, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה C,

וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו-A, כמתואר בסרטוט.

הנקודה D נמצאת על המעגל כך שהמיתר CD מקביל למיתר EA.

המיתרים ED ו-AC נחתכים בנקודה K.

א. הוכיחו:  $\triangle CEB \sim \triangle DCE$ .

נתון:  $ED = 7$ ,  $AK = 3$ .

נסמן את שטח המשולש CEK ב-S.

ב. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CKD.

נתון:  $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$ .

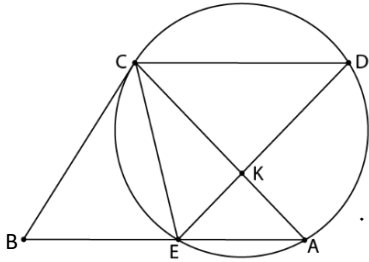
ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEB.

הנקודה O היא מרכז המעגל.

ד. הוכיחו:  $\angle COE = \angle CKE$ .

נתון:  $\angle CAE = 45^\circ$ .

ה. הסבירו מדוע הנקודות E, C, O ו-K נמצאות על מעגל אחד.



5. נתון טרפז ABCD ( $AB \parallel DC$ ), החסום במעגל.

המשכי הצלעות AD ו-BC נפגשים בנקודה E, כמתואר בסרטוט.

נתון:  $\angle ACB = 60^\circ$ . נסמן:  $AC = k$ ,  $\angle CDE = \alpha$ .

א. (1) מצאו את זווית המשולש ACE

(הביעו באמצעות  $\alpha$  אם יש צורך).

(2) הביעו באמצעות  $\alpha$  ו-k את אורכי

הצלעות AB ו-DC.

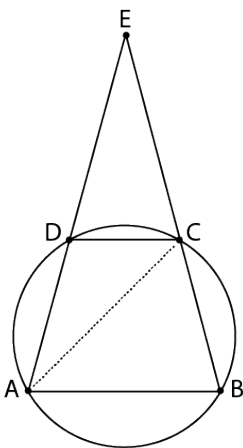
נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 3

משטח המשולש DCE.

ב. מצאו את גודל הזווית  $\alpha$ .

ג. מצאו את הערך של k, שבעבורו אורך

התיכון לצלע EC במשולש AEC הוא  $\sqrt{7}$ .



**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונאליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(x-4)^2}$ ,  $0 < a < 4$  הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים (1)–(5).



הביעו את תשובותיכם באמצעות  $a$  אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים

של הפונקצייה  $f(x)$ .

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם הצירים.

(4) מצאו את שיעור ה- $x$  של נקודת הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ ,

וקבעו את סוגה.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

נתונה הפונקצייה  $g(x) = \frac{x^2}{(x-4)^2}$ ,

המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה  $f(x)$ .

ב. (1) הוכיחו כי גרף הפונקצייה  $g(x)$  נמצא כולו מעל גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

(2) הביעו באמצעות  $a$  את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות

$f(x)$  ו- $g(x)$ , על ידי הישר  $x=1$  ועל ידי ציר ה- $y$ .

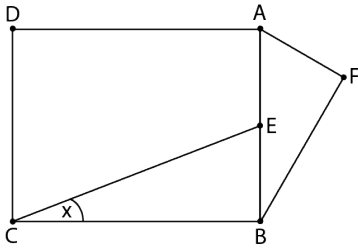
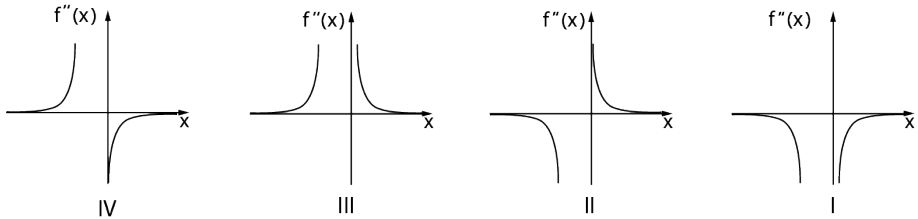
7. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x}}$



- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .  
 (2) האם גרף הפונקצייה  $f(x)$  חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.  
 (3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה  $f(x)$ .  
 (4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה  $f(x)$ .

נתון כי לפונקצייה  $f(x)$  אין נקודות פיתול.

- ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .  
 ג. היעזרו בגרף הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו איזה מן הגרפים I – IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הנגזרת השנייה  $f''(x)$ . נמקו את קביעתכם.  
 ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = 1$  ו- $x = 2$ .



8. הנקודה E היא אמצע הקטע AB.  
 על הקטע AB בונים מלבן ABCD ומשולש ישר זווית AFB,  $\angle AFB = 90^\circ$ , כמתואר בסרטוט.  
 נתון:  $\angle ECB = x$ ,  $\angle FAB = 2x$ .  
 נסמן את אורך הקטע AB ב- $h$ .  
 א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור  $x$ ? הסבירו את תשובתכם.  
 ב. הביעו באמצעות  $x$  ו- $h$  את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF.  
 ג. מצאו את הערך של  $x$  שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.  
 ד. בעבור הערך של  $x$  שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן ABCD לשטח המשולש AFB.

תשובות למבחן בגרות מספר 20 – קיץ תשפ"ג, מועד ב, 2023:

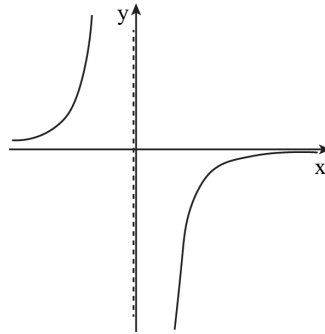
1. א. הוכחה. ב. (1) הוכחה. (2)  $R \frac{\sqrt{3}}{2}$

ג. (1) גרף ד, גרף ג,  $h(x)$  : גרף ג,  $k(x)$  : גרף א. (2)  $n \geq 3$ .

ד. (1) (2) תחומי עלייה:  $x > 0$  או  $x < 0$ ,

תחום ירידה: אין.

3. (1), (2), (4), (3).



2. א. הוכחה. ב. שלילי. ג. 39. ד. -2.

3. א.  $\frac{3}{5}p$ . ב. 54%. ג.  $\frac{90}{529}$ . ד. 0.998.

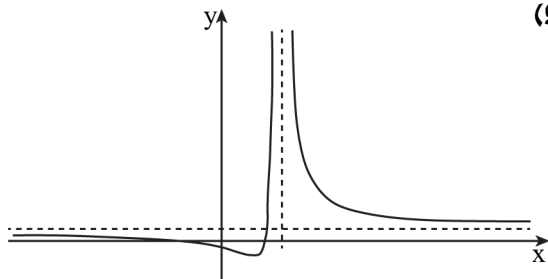
4. א. הוכחה. ב.  $\frac{4}{3}S$ . ג.  $\frac{175}{96}S$ . ד. הוכחה. ה. הסבר.

5. א. (1)  $120^\circ, 180^\circ - 2\alpha, 2\alpha - 120^\circ$  (2)  $DC = \frac{k \cdot \sin(2\alpha - 120^\circ)}{\sin \alpha}, AB = \frac{\sqrt{3}k}{2 \sin \alpha}$

ב.  $\alpha = 75^\circ$ . ג.  $k = 2$ .



6. א. (1)  $x \neq 4$  (2)  $y = 1, x = 4$  (3)  $(-a, 0), (a, 0), (0, -\frac{a^2}{16})$



(4)  $x = \frac{a^2}{4}$ , מינימום. (5)

ב. (1) הוכחה. (2)  $\frac{a^2}{12}$

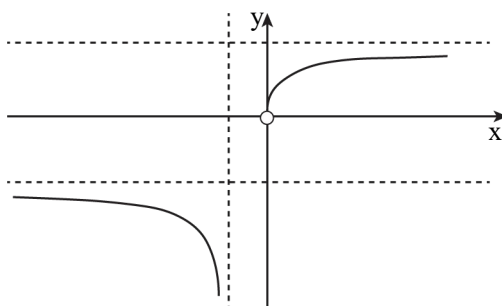
7. א. (1)  $x < -1$  או  $0 < x$  (2) לא.

(3)  $x = -1$ ,  $y = 2$  עבור  $x \rightarrow \infty$ ,  $y = -2$  עבור  $x \rightarrow -\infty$

(4) עלייה:  $x > 0$ , ירידה:  $x < -1$

ג. גרף I.

ד. 0.217



ב.

8. א.  $(0 < x < \frac{\pi}{4})$   $0^\circ < x < 45^\circ$  ב.  $\frac{0.5h}{\sin x} - h \cdot \cos(2x)$  ג.  $x = 30^\circ$   $(\frac{\pi}{6})$  ד. 4



## מבחן בגרות מספר 21

חורף תשפ"ד, מועד א, 2024

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת שלכל  $n$  טבעי זוגי מתקיים:

$$48 + 144 + 288 + \dots + 6n(n+2) = n(n+2)(n+4)$$



ב. המרובע BCED חסום במעגל.

המשך המיתר BD והמשך המיתר CE נפגשים בנקודה A (ראו סרטוט).

נתון:  $AD = CE$ ,  $AE = 2CE$ .

(1) הוכיחו:  $\triangle AED \sim \triangle ABC$ .

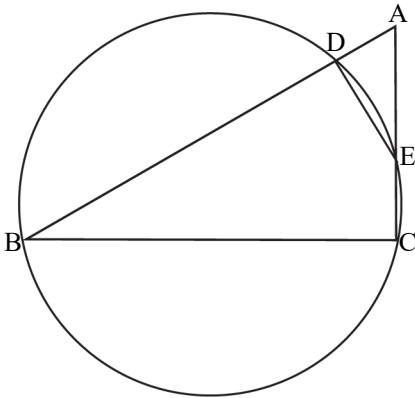
(2) מצאו את היחס  $\frac{AB}{AC}$ .

(3) נתון:  $\angle DEC = 150^\circ$ .

האם BE הוא קוטר

במעגל הנתון?

נמקו את תשובתכם.



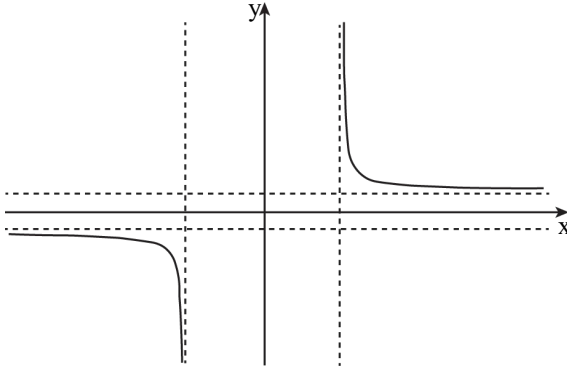


לפניכם סרטוט של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

לפונקצייה  $f(x)$  יש שתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- $x$

ושתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- $y$

אחד מן הביטויים  $IV-I$  שלפניכם מתאר את הפונקצייה  $f(x)$ .



$$\frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \cdot I$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-16}} \cdot II$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}} \cdot III$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}} \cdot IV$$

**(1)** קבעו איזה מן הביטויים  $IV-I$  מתאר את הפונקצייה  $f(x)$ .

נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקצייה  $g(x)$ , המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה  $f(x)$ .

$$g'(x) = f(x) + \frac{5}{3} \text{ מקיימת:}$$

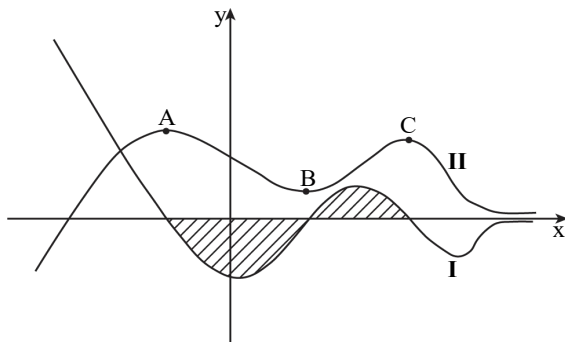
**(2)** מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה  $g(x)$ .

4. הגרפים II-I בסרטוט שלפניכם מתארים את הפונקצייה  $f(x)$ .



ואת פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

כל נקודות הקיצון של הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$  מתוארות בסרטוט.



(1) קבעו איזה גרף, I או II, מתאר את הפונקצייה  $f(x)$ .

נמקו את קביעתכם.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה  $f(x)$ ? נמקו את תשובתכם.

הנקודות A, B ו-C הן נקודות הקיצון של גרף II, כמתואר בסרטוט.

נתון:  $y_B = 2$ ,  $y_A = 6$ .

השטח המוגבל על ידי גרף I ועל ידי ציר ה-x (השטח המקווקו בסרטוט)

שווה ל-7.

(3) מצאו את שיעור ה-y של הנקודה C.

## פרק שני – הסתברות, סדרות ואינדוקציה

2. בסדרה חשבונית A נתון:  $a_1 = -4 - 4k$ ,  $a_3 = -16 + 2k$ .

k הוא פרמטר.



א. מצאו עבור אילו ערכים של k:

(1) הסדרה A עולה,

(2) הסדרה A יורדת,

(3) הסדרה A קבועה.

נתון כי  $a_{17} = -232$ .

ב. מצאו את הערך של k.

הציבו את הערך של k שמצאתם וענו על הסעיפים ג-ד.

נתונה סדרה חדשה, B, שאיבריה מוגדרים כך:

$$b_n = a_n + 24n + 17, \text{ לכל } n \text{ טבעי,}$$

ג. הוכיחו כי הסדרה B היא חשבונית.

ד. חשבו את הסכום:  $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{29}^2 - b_{30}^2$ .

3. ביישוב מסוים הוחלט לערוך סקר בנוגע להקמת פארק ביישוב.

בסקר השתתפו תושבים מבוגרים וצעירים בלבד.



כל אחד מן התושבים שהשתתף בסקר כתב אם הוא תומך בהקמת הפארק או מתנגד להקמתו (לא היו נמנעים).

כל התושבים המבוגרים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק.

בחרו באקראי בתושב אחד מבין התושבים שהשתתפו בסקר.

נסמן ב-  $p$  את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר.

נסמן ב-  $k$  את ההסתברות שהתושב שנבחר תמך בהקמת הפארק.

א. הביעו באמצעות  $p$  ו- $k$  את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר התומך בהקמת הפארק.

מחצית מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק.

$\frac{3}{7}$  מן המשתתפים בסקר שתמכו בהקמת הפארק היו צעירים.

ב. מצאו את  $p$  ואת  $k$

יוסי, כתב חדשות מקומי, ראיין באקראי 6 מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר.

ג. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם תמך בהקמת הפארק ולפחות אחד מהם התנגד להקמת הפארק?

לאחר מכן ראיין יוסי באקראי, בזה אחר זה, 5 תושבים שהשתתפו בסקר.

ד. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מהמרוואיינים האלה היו צעירים, ושהמרוואייין האחרון מהם היה צעיר?

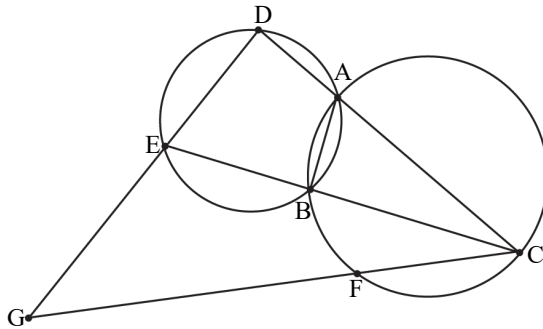
## פרק שלישי – גיאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. C היא נקודה על המעגל הימני.

המשכי הקטעים CA ו-CB חותכים את המעגל השמאלי בנקודות D ו-E בהתאמה.

הנקודה F נמצאת על הקשת BC, כמתואר בסרטוט.

המשכי הקטעים CF ו-DE נפגשים בנקודה G.



א. הוכיחו:  $\angle EDA = \angle CBA$

ב. הוכיחו: המרובע GDAF הוא בר חסימה במעגל.

המיתרים AF ו-BC נפגשים בנקודה H.

נתון:  $\angle GEC = \angle CHA$ .

ג. הוכיחו:  $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$ .

נתון: CE מאונך ל-AB.

.  $CD = 36$ ,  $DE = 18$

ד. חשבו את אורכי הקטעים EG ו-CG.

5. נתון מעגל שמרכזו O והרדיוס שלו R.

מנקודה E, הנמצאת מחוץ למעגל,

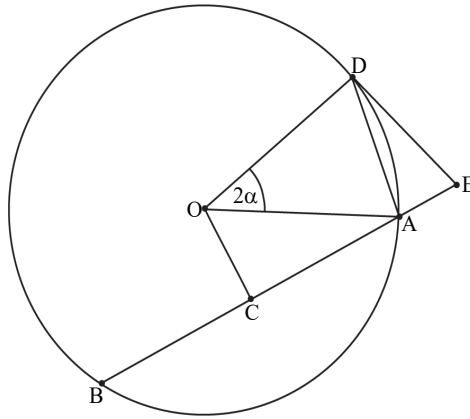
העבירו ישר החותך את המעגל בנקודות A ו-B, כמתואר בסרטוט.

הנקודה D נמצאת על הקשת הגדולה AB, כך שהקטע ED משיק למעגל.

הנקודה C היא אמצע המיתר AB.

נסמן את הזווית בין הרדיוסים OD ו-OA ב- $2\alpha$  ( $\alpha < 60^\circ$ ).

נתון: המרחק של הנקודה O מן המיתר AB הוא  $0.5R$ .



א. מצאו את זוויות המרובע DOCE. הביעו באמצעות  $\alpha$  אם יש צורך.

ב. הביעו באמצעות R ו- $\alpha$  את אורך הקטע DE.

ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOD הוא  $\frac{4}{7}R$ .

ד. מצאו את  $\alpha$ .

ה. מצאו את היחס בין שטח המעגל החוסם את המרובע DOCE

ובין שטח המעגל הנתון.



**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינום,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקצייה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$



- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .  
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה  $f(x)$ .  
 (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם הצירים.  
 (4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.  
 ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

נתונה הפונקצייה  $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x}-2}$  המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה  $f(x)$ .

- ג. הראו כי לכל  $x > 0$  בתחום ההגדרה של הפונקציות מתקיים  $f(x) = g'(x)$ .  
 ד. לפניכם טענות I – II. קבעו בנוגע לכל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.  
 I. יש משיק לגרף הפונקצייה  $g(x)$  ששיפועו הוא 2.  
 II. לפונקצייה  $g(x)$  יש נקודת פיתול אחת בלבד.

ה. חשבו את ערך הביטוי  $\int_{0.25}^1 g(x) \cdot f(x) dx$ .

7. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{\sin(x) - a}{\sin(x) + a}$ . הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$  המקיים  $\sin(x) \neq -a$ .



נתון כי הגרף של הפונקצייה  $f(x)$  משיק לציר  $x$  בכל נקודות הקיצון שלה.

א. מצאו את הערך של  $a$ .

הציבו  $a = 1$ , וענו על הסעיפים ב-ה עבור התחום  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ .

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.

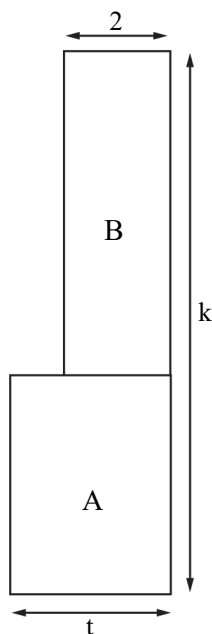
ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

ד. כמה פתרונות יש למשוואה  $f(x) = -1$  בתחום הנתון? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי הפונקצייה  $f(x)$  קעורה כלפי מטה בכל אחד מחלקי תחום הגדרתה.

ה. קבעו אם הטענה שלפניכם נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

$$\int_0^{\pi} (f(x) + 1) dx > \frac{\pi}{2}$$



8. נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו,

גינה A וגינה B. הרוחב של גינה A הוא  $t$  מטרים.



הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה

הוא  $2t + 2$  מ"ר, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

האורך הכול של שתי הגינות הוא  $k$  מטרים.

$k$  הוא קבוע.

א. הביעו באמצעות  $k$  ו- $t$  את שטח הגינה A.

ב. הביעו באמצעות  $k$  את הערך של  $t$  שבעבורו היחס

בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A הוא מינימלי.

ג. הביעו באמצעות  $k$  את הערך של  $t$  שבעבורו

היחס בין שטח הגינה A ובין שטח הגינה B

הוא מקסימלי. נמקו את תשובתכם.

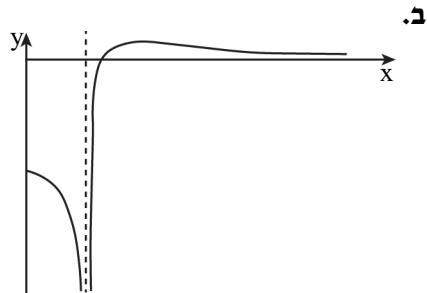
תשובות למבחן בגרות מספר 21 – חורף תשפ"ד, מועד א, 2024:

1. א. הוכחה. ב. (1). הוכחה. (2) (3) כן.  
 ג. (1) ביטוי II. (2) תחומי עלייה:  $x > 4$ ,  $x < -5$  תחומי ירידה:  $-5 < x < -4$   
 ד. (1) גרף II. (2) (3) 5.
2. א. (1)  $k > 2$ . (2)  $k < 2$ . (3)  $k = 2$ . ב.  $k = -3$ . ג. הוכחה. ד.  $-48,465$ .
3. א.  $p+k-1$ . ב.  $p=0.6$ ,  $k=0.7$ . ג.  $\frac{31}{32}$ . ד.  $\frac{648}{3125}$ .
4. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד.  $CG = 60$ ,  $EG = 30$ .
5. א.  $90^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $60^\circ + 2\alpha$ ,  $120^\circ - 2\alpha$ . ב.  $\frac{2R \sin \alpha \cdot \sin(60^\circ + \alpha)}{\sin(120^\circ - 2\alpha)}$ . ג.  $28.96^\circ$ . ד.  $0.55$ .
6. א. (1)  $x \geq 0$ ,  $x \neq 4$ . (2)  $y = 0$ ,  $x = 4$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).  
 (3)  $(0, -1)$ ,  $(16, 0)$ . (4)  $(36, \frac{1}{8})$  מקסימום,  $(0, -1)$  מקסימום.

ג. להראות.

ד. טענה I - לא נכונה, טענה II - נכונה.

ה.  $\frac{17}{18}$ .



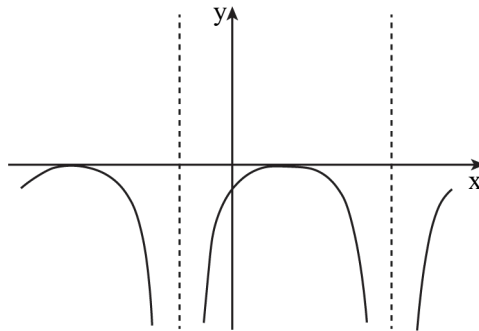
7. א.  $a = 1$ .

ב. (1)  $x \neq \frac{3\pi}{2}$ ,  $x \neq -\frac{\pi}{2}$ ,  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ .

(2)  $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $(0, -1)$

(3) מקסימום  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ , מקסימום  $(2\pi, -1)$ ,

מינימום  $(-2\pi, -1)$ , מקסימום  $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$ .



ד. 5. ה. נכונה.

8. א.  $t(k-t-1)$ . ב.  $\sqrt{k}-1$ . ג.  $\sqrt{k}-1$ .



## מבחן בגרות מספר 22

### קיץ תשפ"ד, מועד א, 2024

#### פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים



$$.4+13+\dots+\frac{5n^2+3n}{2}=\frac{n(n+1)(5n+7)}{6} \quad \text{: בעבור כל } n \text{ טבעי}$$

ב. נתונות הפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$  ו- $f''(x)$ , המוגדרות לכל  $x \neq 0$ .



בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$ .

לגרף הפונקצייה  $f''(x)$  יש שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ ,

ושיעוריהן הם  $(a,0)$ ,  $(b,0)$ ,  $(d,0)$ .

הנקודה  $(c,e)$  היא נקודת הקיצון של

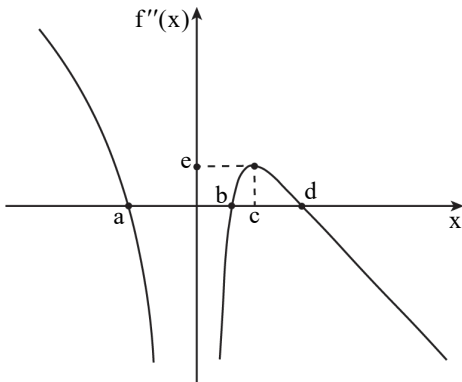
הפונקצייה  $f''(x)$ .

(1) הביעו באמצעות  $a, b, c, d, e$ ,

אם יש צורך,

את תחומי העלייה והירידה

של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .



נתונה הפונקצייה  $h(x)$ , המקיימת  $h'(x) = f''(x) - e$ .

הפונקצייה  $h(x)$  מוגדרת לכל  $x \neq 0$ .

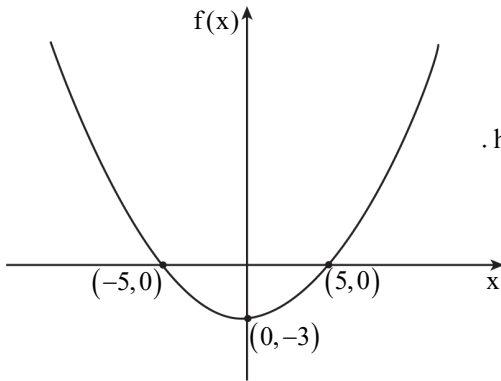
(2) מצאו כמה נקודות קיצון וכמה נקודות פיתול יש לפונקצייה  $h(x)$

(אם יש כאלה). נמקו את תשובתכם.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה  $f(x)$ , ועליו כתובים כל שיעורי



נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$



ושיעורי נקודת המינימום שלה.

הפונקצייה מוגדרת לכל  $x$ .

נתונות הפונקציות:

$$h(x) = |f(x)| + m, \quad g(x) = |f(x) + m|$$

$m$  הוא פרמטר,  $0 < m < 2$ .

(1) הביעו באמצעות  $m$ ,

אם יש צורך, את שיעורי

נקודת המקסימום

של הפונקצייה  $g(x)$ .

(2) הביעו באמצעות  $m$ , אם יש צורך, את שיעורי נקודות הקיצון של

הפונקצייה  $h(x)$ , וקבעו את סוגן.

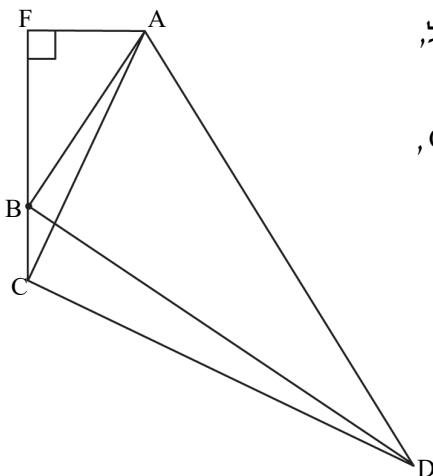
(3) לפניכם שתי טענות, I-II. קבעו בעבור כל טענה אם היא נכונה או

אינה נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. הפונקציות  $g(x)$  ו- $h(x)$  חיוביות לכל ערך של  $x$ .

II. לכל ערך של  $m$  בתחום  $0 < m < 2$  מתקיים שהישר  $y = m + \frac{1}{2}$

חותך כל אחת מן הפונקציות  $g(x)$  ו- $h(x)$  בשלוש נקודות.



המרובע ABCD הוא בר חסימה במעגל,



כך ש-AD הוא קוטר במעגל.

הנקודה F נמצאת על המשך הצלע CB,

כך ש- $FB \perp FA$ , כמתואר בסרטוט.

(1) הוכיחו:  $\triangle ACD \sim \triangle AFB$ .

נתון:  $\angle BDA = 24^\circ$ .

(2) מצאו את היחס בין שטח

המשולש ACD ובין שטח

המשולש AFB.

## פרק שני – סדרות והסתברות

2. הסדרה  $A$  היא סדרה הנדסית שאיבריה הם  $a_1, a_2, a_3, \dots$

ומנתה היא  $q$ ,  $-1 < q < 0$ .



נתון:  $a_1 = 1$ .

הסדרה  $B$  מוגדרת לכל  $n$  טבעי באופן הזה:  $b_n = a_n \cdot a_{n+2}$ .

א. הוכיחו כי הסדרה  $B$  היא סדרה הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות  $q$ .

ב. לפניכם שלוש טענות I–III.

קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. הסדרה  $A$  לא עולה ולא יורדת.

II. הסדרה  $B$  היא סדרה עולה.

III. האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה  $A$  יוצרים סדרה עולה.

נתון: הסדרה  $B$  היא סדרה אין-סופית שסכומה הוא  $\frac{1}{8}$ .

ג. מצאו את ערכו של  $q$ .

נתונה סדרה הנדסית נוספת  $C$ , המוגדרת לכל  $n$  טבעי באופן הזה:  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ .

נתון:  $c_3 + c_4 + \dots + c_m = 44,307$ , הוא מספר טבעי.

ד. מצאו את הערך של  $m$ .

3. בחידון יש 5 שאלות. ההסתברות לענות נכון על כל אחת מן השאלות היא P.

ידוע כי ההסתברות שמתמודד בחידון



יענה נכון על 4 שאלות לכל היותר היא 0.83193.

א. מצאו את P.

ב. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 3 שאלות בדיוק.

מספר הנקודות הניתן לכל שאלה זהה למספר השאלה.

כלומר מתמודד שענה נכון על שאלה 1, מקבל נקודה אחת.

מתמודד שענה נכון על שאלה 2 מקבל שתי נקודות, וכן הלאה.

ג. מצאו את ההסתברות שמתמודד יצבור 14 נקודות לפחות.

ד. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יצבור 6 נקודות בדיוק.

ה. ידוע כי אחינעם ענתה נכון על 3 שאלות בדיוק.

מצאו את ההסתברות שהיא צברה 6 נקודות בדיוק.



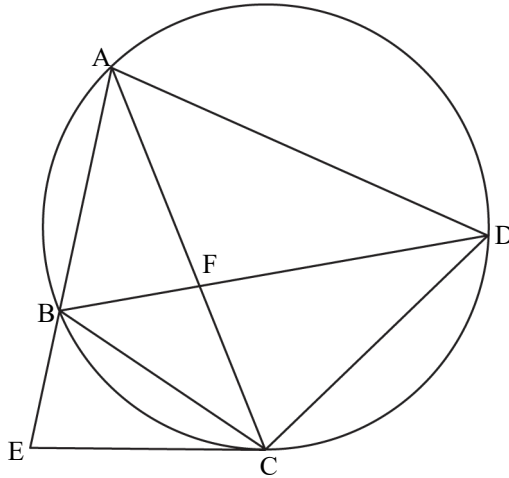
## פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. המרובע ABCD חסום במעגל.

אלכסוני המרובע נחתכים בנקודה F.

המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך המיתר AB בנקודה E (ראו סרטוט).

נתון:  $AB = CB$ .



א. הוכיחו:  $\angle EBC = 2 \cdot \angle BDC$ .

נתון: AC חוצה את זווית ECD,

$$\frac{CD}{CF} = \frac{7}{4}$$

ב. (1) הוכיחו:  $AC = AD$ .

(2) מצאו את היחס  $\frac{AD}{CD}$ .

(3) מצאו את היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש CBF.

נסמן את שטח המשולש ABF ב-S.

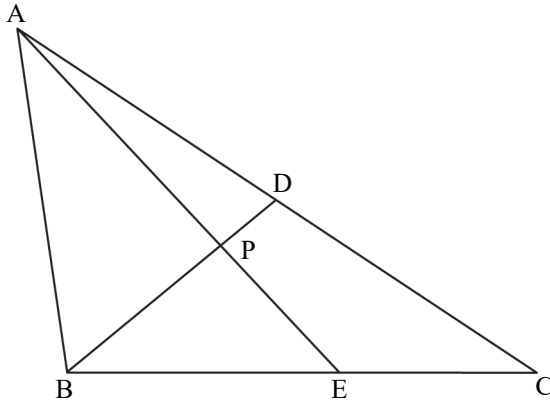
ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AEC.

5. במשולש  $ABC$ ,  $BD$  הוא תיכון לצלע  $AC$ . הנקודה  $E$  נמצאת על הצלע  $BC$ .

$AE$  ו- $BD$  נחתכים בנקודה  $P$  (ראו סרטוט).

נתון:  $BP = 3 \cdot PD$ .

נסמן:  $AB = k$ ,  $\angle BAP = \alpha$ ,  $\angle ABP = \beta$ ,  $\alpha < \beta$ .



א. הביעו באמצעות  $\alpha, \beta$  ו- $k$  את אורכי הקטעים  $AP$  ו- $BP$ .

נתון כי  $AE$  ו- $BD$  מאונכים זה לזה, וכי שטח המשולש  $ABD$  הוא  $\frac{1}{4}k^2$ .

ב. מצאו את גודל הזווית  $\alpha$ .

ג. מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $AEC$

ובין רדיוס המעגל חוסם את המשולש  $AEB$ .

**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינום,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציה טריגונומטרית**

6. נתונה הפונקצייה:  $f(x) = \frac{4x}{(x^2 - a)^2}$ ,  $a$  הוא פרמטר חיובי.



ענו על סעיפים א-ה.

הביעו את תשובותיכם באמצעות  $a$  אם יש צורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים

של הפונקצייה  $f(x)$ .

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה  $f(x)$ .

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

$g(x)$  היא פונקצייה המקיימת  $g'(x) = f(x)$ .

גרף הפונקצייה  $g(x)$  עובר בנקודה  $(0,0)$ .

הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$  מוגדרות באותו התחום.

ג. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של הפונקצייה  $g(x)$ .

ד. (1) מצאו פונקצייה  $g(x)$  המקיימת תנאים אלו.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $g(x)$  שמצאתם בתת-סעיף ד(1).

$h(x)$  היא פונקצייה המוגדרת כך:  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ .

הפונקציות  $h(x)$  ו-  $f(x)$  מוגדרות באותו התחום.

ה. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים

של הפונקצייה  $h(x)$ .

(2) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקצייה  $h(x)$ .

7. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \cos x - \sqrt{\cos x}$  , בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$  .

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$  .



(2) הראו כי הפונקצייה  $f(x)$  היא פונקצייה זוגית.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם הצירים.

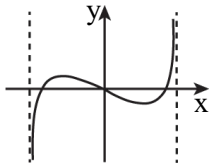
(4) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$  ,

וקבעו את סוגן (בתשובתכם דייקו 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

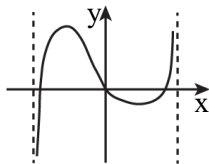
ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$  .

ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה  $f(x)$  (אם יש כאלה)

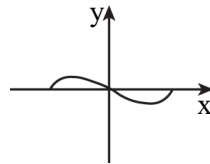
ד. קבעו איזה מן הגרפים I – IV שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  .



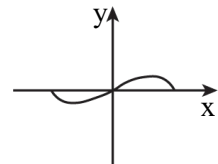
IV



III



II



I

נתונה הפונקצייה  $g(x) = k - f(x)$  , הוא פרמטר חיובי.

הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$  מוגדרות באותו התחום.

נסמן ב-  $S$  את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה  $f(x)$  ועל ידי ציר ה-  $x$

בתחום בין 0 ל-  $\frac{\pi}{2}$  .

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$

ועל ידי הישרים  $x = \frac{\pi}{2}$  ו-  $x = -\frac{\pi}{2}$  הוא  $10 \cdot S$  .

ה. הביעו את  $k$  באמצעות  $S$  .

8. הקטע AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R.

מסמנים על הקוטר נקודה C ועל המעגל מסמנים נקודה D, כך שהקטע CD מאונך לקטע AB.

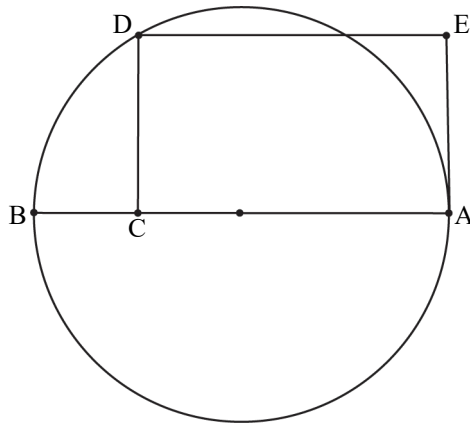
הקטע AC גדול מ-R.

דרך הנקודה D מעבירים ישר שמקביל לקוטר AB.

דרך הנקודה A מעבירים משיק למעגל.

הישר המקביל והמשיק נחתכים בנקודה E.

נסמן:  $AC = x$ .



א. הביעו באמצעות R את הערך של x שבעבורו שטח המלבן ACDE מקסימלי.

הנקודה F נמצאת על הצלע DE.

ב. הביעו באמצעות R את סכום השטחים המקסימלי

של המשולשים CDF ו-AFE.

תשובות למבחן בגרות מספר 22 – קיץ תשפ"ד, מועד א, 2024:

1. א. הוכחה.

ב. (1) תחומי עלייה:  $x < a$ ,  $b < x < d$ ;

תחומי ירידה:  $a < x < 0$ ,  $0 < x < b$ ,  $x > d$ .

(2) נקודת קיצון אחת, ונקודת פיתול אחת.

ג. (1)  $\max(0, 3 - m)$ . (2)  $\min(\pm 5, m)$ ,  $\max(0, m + 3)$ .

ד. (1) הוכחה. (2)  $\sim 6.045$ .

2. א. הוכחה, המנה  $q^2$ . ב. I נכונה, II לא נכונה, III נכונה. ג.  $q = -\frac{1}{3}$ . ד.  $m = 9$ .

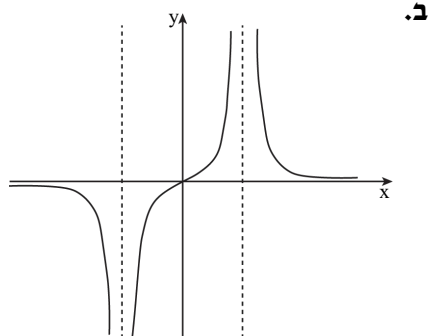
3. א.  $p = 0.7$ . ב.  $0.3087$ . ג.  $0.2401$ . ד.  $0.05733$ . ה.  $\frac{1}{10}$ .

4. א. הוכחה. ב. (1) הוכחה. (2)  $\frac{AC}{CD} = \frac{4}{3}$ . (3)  $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CBF}} = \frac{4}{3}$ . ג.  $2.75 \cdot S$ .

5. א.  $BP = \frac{k \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}$ ,  $AP = \frac{k \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ . ב.  $\alpha \approx 24.3^\circ$ . ג.  $\sim 1.843$ .

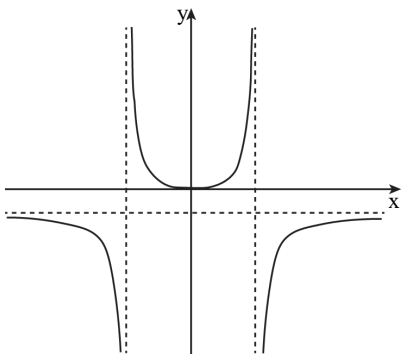
6. א. (1)  $x \neq \pm\sqrt{a}$ , (2)  $x = \pm\sqrt{a}$ ,  $y = 0$ .

ב. (3) תחום עלייה:  $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ , תחומי ירידה:  $x < -\sqrt{a}$ ,  $x > \sqrt{a}$ .



ג. תחומי הקעירות כלפי מעלה (∪) :  $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$

תחומי הקעירות כלפי מטה (∩) :  $-x < -\sqrt{a}$  ,  $x > \sqrt{a}$



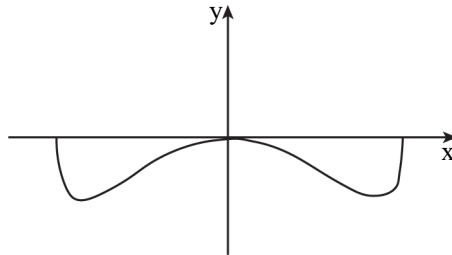
(2)  $g(x) = -\frac{2}{x^2 - a} - \frac{2}{a}$  (1) ד.

ה. (1)  $x = \pm\sqrt{a}$  ,  $y = 0$  (2)  $x < -\sqrt{a}$  ,  $0 < x < \sqrt{a}$

7. א. (1)  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  (2) להראות. (3)  $(0,0)$  ,  $(\pm\frac{\pi}{2}, 0)$

(4)  $(0,0)$  מקסימום,  $(\pm 0.42\pi, -0.25)$  מינימום,  $(\pm\frac{\pi}{2}, 0)$  מקסימום.

ב.



ג. תחומי שליליות:  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  . ד. IV . ה.  $k = \frac{6 \cdot S}{\pi}$

8. א.  $x_{\max} = 1.5R$  . ב.  $\frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot R^2$



## מבחן בגרות מספר 23

קיץ תשפ"ד, מועד ב, 2024

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים.

א. (1) הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם

מתקיים בעבור כל  $n$  טבעי.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(2) האם הביטוי  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$  שווה ל- $\frac{n+1}{n}$  בעבור כל  $n$  טבעי?

נמקו את תשובתכם.



ב. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

נסמן:  $\sphericalangle ACB = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

(1) הביעו באמצעות  $\alpha$  את היחס בין רדיוס המעגל החוסם

את משולש ABC, ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש AOB.

נתון כי היחס שהבעתם בתת-סעיף (1) שווה ל- $\sqrt{2}$ ,

וכי הצלע CB משיקה למעגל החוסם את משולש AOB.

(2) הוכיחו כי מרכז המעגל O נמצא על הצלע AC.







ג. נתון כי הפונקצייה  $f(x)$  היא פונקצייה איזוגית ורציפה המוגדרת לכל  $x$ .

לפונקצייה  $f(x)$  יש נקודת מינימום אחת בלבד ובה  $x = -\frac{1}{2}$ .

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$

עם ציר ה- $x$  היא בנקודה  $(1, 0)$ .

**(1)** סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

נתון כי הפונקצייה  $g(x)$  היא פונקצייה זוגית המוגדרת לכל  $x$ .

פונקציית הנגזרת  $g'(x)$  מקיימת  $g'(x) = -f(x)$ .

נתון:  $g(1) = 2$ .

**(2)** מצאו את שיעורי נקודות המינימום של הפונקצייה  $g(x)$ .

**(3)** לפניכם שני היגדים I – II. קבעו עבור כל היגד אם הוא נכון או לא נכון.

נמקו את קביעותיכם.

I. שיעור ה- $y$  של נקודות המקסימום של הפונקצייה  $g(x)$

הוא בין 0 ל-2.

II. הפונקצייה  $g(x)$  חיובית לכל  $x$ .



.7

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף

הפונקצייה  $f(x)$  המוגדרת לכל  $x$ .

אחד מן הביטויים I – IV שלפניכם

מייצג את הפונקצייה  $f(x)$ .

(1) קבעו איזה מן הביטויים מייצג

את הפונקצייה  $f(x)$ .

נמקו את קביעתכם.

I .  $f(x) = x(x-4)(x+6)$

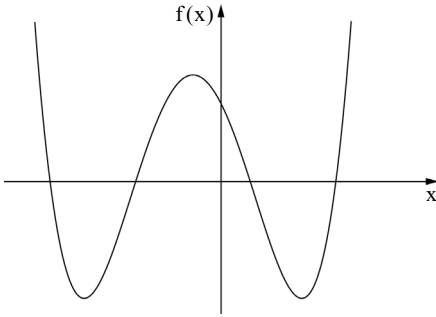
II .  $f(x) = x(x-1)(x+3)(x+6)$

III .  $f(x) = (x-4)(x-1)(x+3)(x+6)$

IV .  $f(x) = (x-4)(x+1)(x+3)(x+6)$

נתונה הפונקצייה  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .(2) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $g(x)$ .(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $g(x)$ .

נתון :  $\int_4^7 g(x) dx = k$ .

(4) הביעו באמצעות  $k$  את הערך של  $\int_5^8 [2 \cdot g(x-1) + 1] dx$ .

## פרק שני – סדרות והסתברות

2. נתונה סדרה הנדסית שבה  $2n+1$  איברים ( $n$  הוא מספר טבעי).

כל איברי הסדרה  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$  הם חיוביים.



סכום איברי הסדרה ללא שני האיברים הראשונים גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה ללא שני האיברים האחרונים.

נתון כי סכום האיברים שנמצאים אחרי האיבר האמצעי גדול פי 256 מסכום האיברים שנמצאים לפני האיבר האמצעי.

א. מצאו את  $n$ .

המשיכו את הסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה הנדסית אינסופית.

נתון:  $B$  היא סדרה אינסופית המקיימת לכל  $k$  טבעי  $b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}$ .

ב. הוכיחו כי הסדרה  $B$  היא סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה.

בסדרה  $B$  כופלים כל איבר שנמצא במקום זוגי ב-2.

נתון כי לאחר ההכפלה, סכום האיברים שנמצאים במקומות האיזוגיים

גדול ב- $\frac{1}{30}$  מסכום האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים.

ג. מצאו את  $a_1$ .

3. במחקר שנעשה בקרב תלמידים בבית ספר מסוים נבדק הקשר בין חברות

בתנועת נוער ובין התנדבות בקהילה.



80% מן החברים בתנועת נוער מתנדבים בקהילה.

בוחרים באקראי 5 תלמידים שחברים בתנועת נוער (הוצאה עם החזרה).

א. מהי ההסתברות שבחרו לפחות תלמיד אחד שמתנדב ולפחות תלמיד אחד שאינו מתנדב?

נתון כי 55% מן התלמידים אינם חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים,

ו-  $\frac{1}{12}$  מן התלמידים שאינם חברים בתנועת נוער מתנדבים.

ב. כמה אחוזים מן התלמידים חברים בתנועת נוער?

במחקר השתתפו 100 תלמידים סך הכול.

ג. כמה מן התלמידים חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים?

ד. בוחרים באקראי 3 מן התלמידים שאינם מתנדבים (הוצאה ללא החזרה).

(1) מהי ההסתברות שהתלמיד הראשון שנבחר חבר בתנועת נוער

וששני התלמידים שנבחרו אחריו אינם חברים בתנועת נוער?

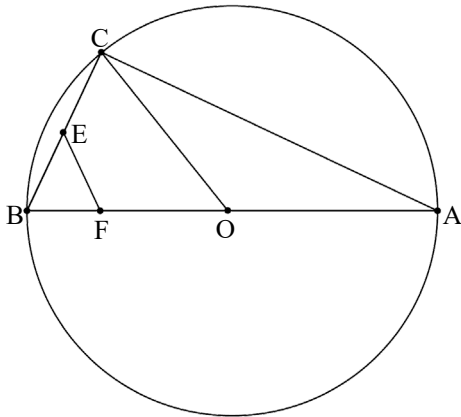
(2) מהי ההסתברות שאחד מן התלמידים שנבחרו חבר בתנועת נוער

והשניים האחרים אינם חברים בתנועת נוער,

אם ידוע שהתלמיד הראשון שנבחר אינו חבר בתנועת נוער?

## פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-AB הוא קוטר במעגל.



נקודה E נמצאת על הצלע BC, הנקודה F נמצאת על הקטע BO, כמתואר בסרטוט.

נתון כי המרובע CEFO

הוא בר חסימה במעגל.

א. הוכיחו:  $EF = EB$ .

המעגל החוסם את המרובע CEFO

חותך את הצלע AC בנקודה D

כך ש-ED מקביל ל-AB.

ב. (1) הוכיחו כי המרובע EDOB הוא מקבילית.

(2) הוכיחו:  $OD \perp AC$ .

הישר  $\ell$ , משיק בנקודה C למעגל החוסם את המשולש ABC.

ג. הוכיחו כי הישר  $\ell$ , משיק למעגל החוסם את המרובע CEFO.

5. משולש ABC חד זוויות חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

הנקודה D היא אמצע הקשת הקטנה BC, כמתואר בסרטוט.

נתון:  $\angle ABC = 60^\circ$ .

נסמן:  $\angle BAC = \alpha$ .

א. הביעו באמצעות R ו- $\alpha$  את

שטחי המשולשים ABC ו-ODC.

נתון כי היחס בין שטח

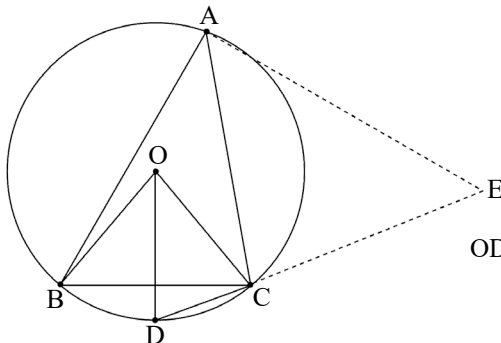
המשולש ABC ובין שטח המשולש ODC

הוא  $2\sqrt{3} \sin(80^\circ)$ .

ב. מצאו את הערך של  $\alpha$ .

הנקודה E נמצאת על המשך המיתר DC כך ש- $\angle CAE = 50^\circ$ , כמתואר בסרטוט.

ג. הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החסום במשולש ACE.



**פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{x-1}{(x-a)^3}$ , המוגדרת בתחום  $x \neq a$ ,

a הוא פרמטר שונה מ-0.

א. ענו על התת-סעיפים (1)–(2).



הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים

של הפונקצייה f(x).

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה f(x) עם ציר ה-y.

ב. מצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקצייה f(x) נקודת קיצון שנמצאת

משמאל לאסימפטוטה האנכית לציר ה-x, וקבעו את סוגה.

הגרפים 1–4 שבסוף השאלה מתארים את הפונקצייה f(x)

בעבור ערכים שונים של a.

ג. התאימו לכל אחד מן הערכים IV–I של a את הגרף המתאים לו,

ונמקו את תשובותיכם.

I.  $a = -1$  II.  $a = 0.5$  III.  $a = 1$  IV.  $a = 2$

נתונה הפונקצייה  $g(x) = f(x) - b$  המקיימת b בעבור הערך של a

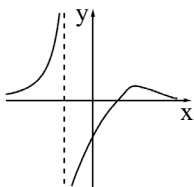
המתאים לגרף 2. b הוא פרמטר חיובי.

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקצייה g(x) עם ציר ה-x היא  $(t, 0)$ ,  $1 < t < 5$ .

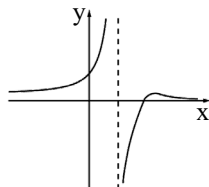
נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה g(x), על ידי האסימפטוטה

האופקית של הפונקצייה g(x), על ידי הישר  $x = t$  ועל ידי הישר  $x = 5$  הוא 1.75.

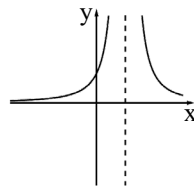
ד. מצאו את הערך של b.



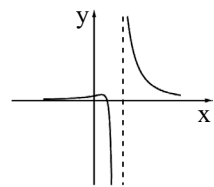
4



3



2



1

7. נתונה הפונקצייה  $f(x) = (b + \cos x) \sin x$ , המוגדרת בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,

b הוא פרמטר.



א. האם הפונקצייה  $f(x)$  היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי לגרף הפונקצייה  $f(x)$  יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ .

ב. לפניכם שלוש אפשרויות I-III לערכים של b.

קבעו איזו אפשרות יכולה להתאים לפונקצייה  $f(x)$ , ונמקו את קביעתכם.

I.  $b = 0$     II.  $0 < b < 1$     III.  $1 \leq b$

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה  $f(x)$ , כאשר  $\cos x = \frac{1}{4}$ , הוא  $\left(-\frac{5}{8}\right)$ .

ג. מצאו את הערך של b.

הציבו  $b = 1$  בפונקצייה  $f(x)$ , וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.

ה. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

נתונה הפונקצייה  $g(x)$  המקיימת  $g(x) = (f(x))^2 \cdot f'(x)$ .

הפונקצייה  $g(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

ו. חשבו את השטח ברביע הראשון, המוגבל על ידי גרף הפונקצייה  $g(x)$

ועל ידי ציר ה- $x$ .

8. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \sqrt{x}$ , המוגדרת בתחום  $x \geq 0$ ,

ונתונה הפונקצייה  $g(x) = \frac{16}{x^2 + 3}$ , המוגדרת לכל  $x$ .



א. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה  $g(x)$ ,

וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הפיתול של הפונקצייה  $g(x)$ .

(3) סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של כל אחת

מן הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ .

בנקודה  $C(t, 0)$  מעבירים אנך לציר ה- $x$ ,  $t > 0$ .

האנך חותך את גרף הפונקצייה  $f(x)$  בנקודה  $A$  ואת הגרף של הפונקצייה  $g(x)$

בנקודה  $B$ .

ב. הביעו באמצעות  $t$  את מכפלת אורכי הקטעים  $AC$  ו-  $BC$ .

ג. הוכיחו כי מכפלת אורכי הקטעים  $AC$  ו-  $BC$  מקסימלית כאשר הנקודה  $B$

היא נקודת פיתול של הפונקצייה  $g(x)$ .

נתונה הפונקצייה  $k(x) = \frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2 + 3}$ , המוגדרת בתחום  $x \geq 4$ .

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים של השאלה.

מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקצייה  $k(x)$ ,

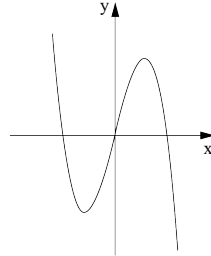
וקבעו את סוגה. נמקו את תשובתכם.



תשובות למבחן בגרות מספר 23 – קיץ תשפ"ד, מועד ב, 2024:

1. א. (1) הוכחה. (2) לא. ב. (1)  $2 \cos \alpha$ . (2) הוכחה.

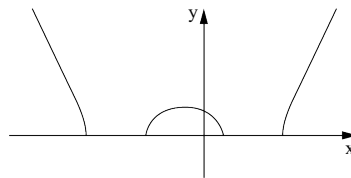
ג. (1) (2)  $(\pm 1, 2)$  מינימום. (3) I - לא נכון, II - נכון



ד. (1) III. (2)  $x \leq -6, -3 \leq x \leq 1, x \geq 4$

(4)  $2k+3$

(3)



2. א.  $n = 7$ . ב. הוכחה, המנה 0.25. ג.  $a_1 = \frac{4}{3}$

3. א. 0.672. ב. 40%. ג. 8. ד. (1)  $\frac{1,320}{13,237}$ . (2)  $\frac{432}{1,891}$

4. א. הוכחה. ב. (1) הוכחה. (2) הוכחה. ג. הוכחה.

5. א.  $S_{ODC} = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin(\alpha)$ ,  $S_{ABC} = \sqrt{3} \cdot R^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(120^\circ - \alpha)$

ב.  $\alpha = 40^\circ$ . ג.  $\sim 0.519 \cdot R$

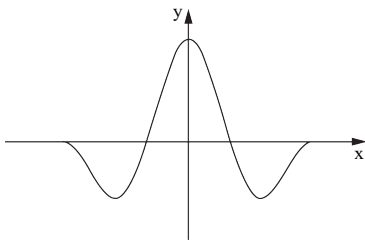
6. א. (1)  $y=0$ ,  $x=a$  (2)  $\left(0, \frac{1}{a^3}\right)$ . ב.  $a > 1$ , מקסימום.

ג. I-גרף 4, II-גרף 3, III-גרף 2, IV-גרף 1. ד.  $b=4$ .

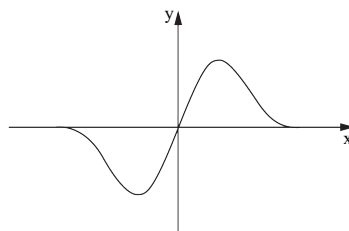
7. א. אי-זוגית. ב. III. ג.  $b=1$ .

ד.  $(\pi, 0)$  מינימום,  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$  מקסימום,

$\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$  מינימום,  $(-\pi, 0)$  מקסימום.



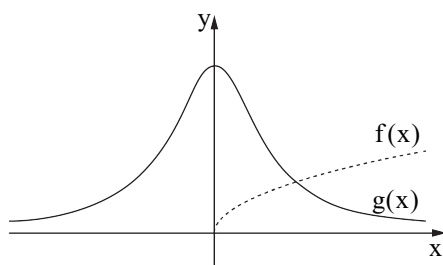
(2)



ה. (1)

י.  $\frac{27\sqrt{3}}{64}$ .

8. א. (1)  $\left(0, \frac{16}{3}\right)$  מקסימום. (2)  $(\pm 1, 4)$ .



(3)

ב.  $\frac{16\sqrt{t}}{t^2+3}$ . ג. הוכחה. ד.  $(5, 2)$  מקסימום.

# נוסחאון מתמטיקה

## 5 יחידות לימוד

**תוכנית חדשה**

### אלגברה

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

השורשים:

$$(a \neq 0) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

**משוואה ריבועית:**

### סדרות:

סדרה הנדסית	סדרה חשבונית	
$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$	כלל נסיגה:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)d$	איבר n-י:
$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad q \neq 1$	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	סכום:
$S = \frac{a_1}{1 - q}$ סכום סדרה אינסופית שסכומה מתכנס:	$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$	

**חזקות:**  $(b \neq 0, a \neq 0)$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	

**לוגריתמים** (לפי אילוצי תחום ההגדרה):

$\log_a(a^b) = b$	$a^{\log_a x} = x$	$\log_a(x^b) = b \cdot \log_a x$
$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$	$\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$	$\log_c x = \frac{\log_a x}{\log_a c}$

**גדילה ודעיכה:** הכמות לאחר t יחידות זמן:  $f(t) = f(0) \cdot q^t$  כאשר q מקדם הגדילה / הדעיכה ליחידת זמן t

### הסתברות

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{הסתברות מותנית:}$$

**נוסחת ברנולי** - ההסתברות ל-k הצלחות מתוך n ניסיונות בהתפלגות בינומית כאשר ההסתברות להצלחה היא p:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

**טריגונומטרייה וגאומטרייה**

**זהויות:**

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

(R – רדיוס המעגל החוסם את המשולש)

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

**משפט הסינוסים:**

( $\gamma$  היא הזווית הכלואה בין הצלעות a ו- b)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

**משפט הקוסינוסים:**

( $\alpha$  היא הזווית הכלואה בין הצלעות b ו- c)

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

**שטח משולש:**

( $\beta$  ו-  $\gamma$  זוויות ליד הצלע a)

$$S = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin(\beta + \gamma)}$$

(R – רדיוס)

$$P = 2\pi \cdot R$$

**היקף מעגל:**

$$S = \pi \cdot R^2$$

**שטח עיגול:**

(R – רדיוס)

$$S = \frac{1}{2} \alpha \cdot R^2$$

**שטח גזרה של  $\alpha$  רדיאנים:**  $\ell = \alpha \cdot R$

**חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי**

**נגזרות:**

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(x^t)' = t \cdot x^{t-1}$ (t ממשי)
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

נגזרת של מכפלת פונקציות:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

נגזרת של מנת פונקציות:

$$[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$$

נגזרת של פונקצייה מורכבת:

$u'(x)$  היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית)

$f'(u)$  היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

**אינטגרלים:**

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + C \quad (t \neq -1, \text{ ממשי } t)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$

אם  $F(x)$  היא פונקצייה קדומה של הפונקצייה  $f(x)$  אז:  $\int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + C$  ( $m \neq 0$ )  
 $\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C$

**גאומטרייה אנליטית**

**קו ישר:**

השיפוע  $m$  של ישר העובר דרך הנקודות  $(x_1, y_1)$  ו-  $(x_2, y_2)$ :  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  ( $x_1 \neq x_2$ )

משוואת ישר ששיפועו  $m$ , העובר בנקודה  $(x_1, y_1)$ :  $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי הנקודה  $C$  המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע

שקצותיו הם  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  ביחס  $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{\ell}$ :  $\left( \frac{\ell x_1 + k x_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + k y_2}{k + \ell} \right)$

שני ישרים, בעלי שיפועים  $m_1, m_2$  מאונכים זה לזה אם ורק אם:  $m_1 \cdot m_2 = -1$

המרחק  $d$  בין הנקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$ :  $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

המרחק  $d$  בין הנקודה  $(x_0, y_0)$  ובין הישר  $Ax + By + C = 0$ :  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

המרחק  $d$  בין הישרים המקבילים  $Ax + By + C_1 = 0$  ו-  $Ax + By + C_2 = 0$ :  $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

**מעגל:**

משוואת המשיק למעגל  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  בנקודה  $(x_0, y_0)$  על המעגל:  $(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$

**פרבולה:**

משוואת המשיק לפרבולה  $y^2 = 2px$  בנקודה  $(x_0, y_0)$  על הפרבולה:  $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$

מדרוך של פרבולה שמשוואתה  $y^2 = 2px$ :  $x = -\frac{p}{2}$

מוקד של פרבולה שמשוואתה  $y^2 = 2px$ :  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

	מרחק המוקד מהראשית	משוואה	
	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	<b>אליפסה</b>
משוואות האסימפטוטות של היפרבולה: $y = \pm \frac{b}{a}x$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	<b>היפרבולה</b>

### מספרים מרוכבים

מכפלה בהצגה קוטבית של המספרים המרוכבים  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  ו-  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  :

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$[R(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

משפט דה־מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{R} \left[ \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right]$$

פתרונות המשוואה  $z^n = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  :

$$k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

### גופים במרחב

מנסרה וגליל: נפח:  $V = B \cdot h$  (B – שטח הבסיס, h – גובה הגוף)

פירמידה וחרוט: נפח:  $V = \frac{B \cdot h}{3}$  (B – שטח הבסיס, h – גובה הגוף)

חרוט ישר: שטח מעטפת:  $M = \pi R \ell$  (R – רדיוס העיגול,  $\ell$  – הקו היוצר)

כדור: נפח:  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$  (R – רדיוס הכדור)

שטח הפנים:  $M = 4\pi R^2$  (R – רדיוס הכדור)

### וקטורים

$$|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

אורך של וקטור  $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$  :

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

מכפלה סקלרית של שני וקטורים  $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$  ו-  $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$  :

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

המכפלה הסקלרית כאשר  $\alpha$  היא הזווית בין הווקטורים  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  :

$$\frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

המרחק של נקודה  $P(x_1, y_1, z_1)$  ממישור  $ax + by + cz + d = 0$  :

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

המרחק בין מישורים מקבילים  $ax + by + cz + d_1 = 0$  ו-  $ax + by + cz + d_2 = 0$  :

$$\sin \beta = \frac{|\underline{n} \cdot \underline{u}|}{|\underline{n}| \cdot |\underline{u}|}$$

הזווית  $\beta$  בין הישר  $\underline{x} = \underline{v} + t \cdot \underline{u}$  למישור  $ax + by + cz + d = 0$  כאשר  $\underline{n} = (a, b, c)$  :

$$\cos \alpha = \frac{|\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2|}{|\underline{n}_1| \cdot |\underline{n}_2|}$$

הזווית  $\alpha$  בין המישורים  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  כאשר  $\underline{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  ו-  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  כאשר  $\underline{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  :